



**MASTER1-FILS**  
**UPB**

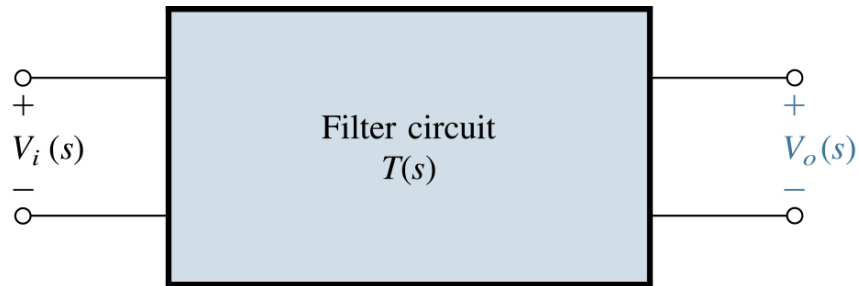
# Le Filtrage des Signaux Numériques

**Andrei Doncescu**

adoncesc@laas.fr

# Filtres Linéaires

Fonction de Transfert



# Filtres Analogiques Passives

4 types de filtres - “Ideal”

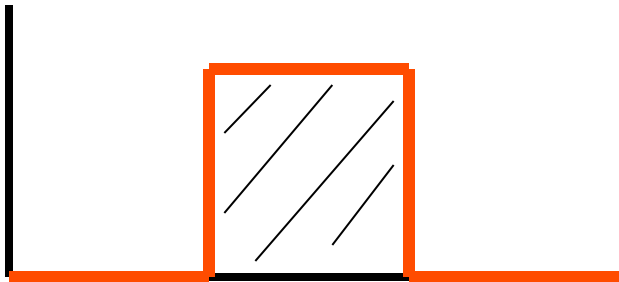
Passe-bas lowpass



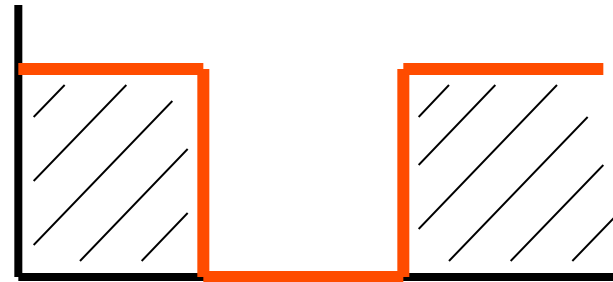
Passe-haut highpass



Bande passante bandpass



Filtre rejecteur bandstop

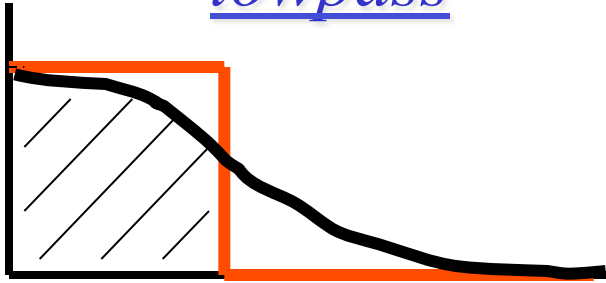


# Filtres Analogiques Passives

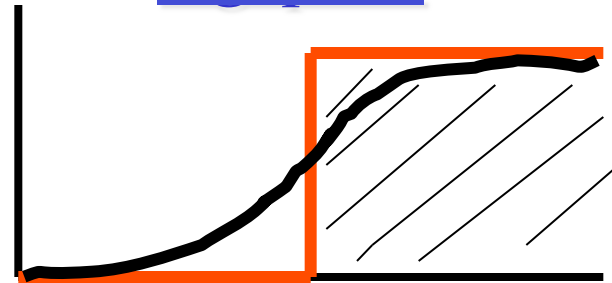
Le Cas Réel :

—

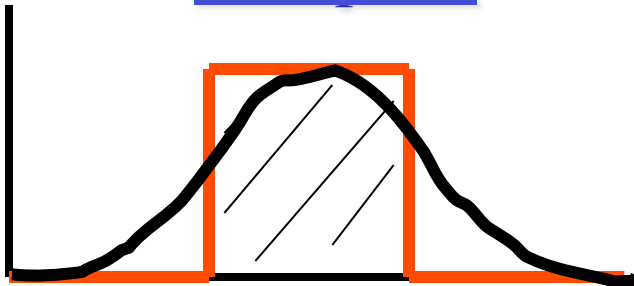
lowpass



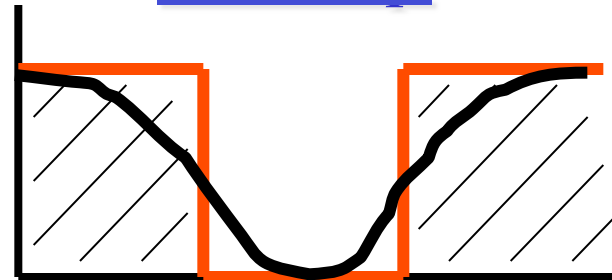
highpass



bandpass

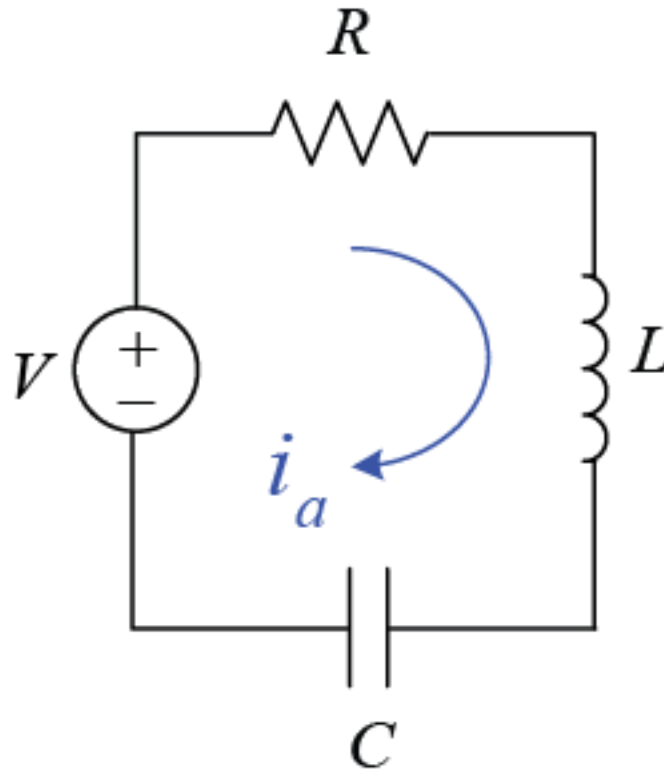


bandstop



# Systemes linéaires

- *Les systèmes linéaires sont caractérisés complètement par leur réponse à une impulsion unité*



# Specification (anglais)

Frequency-Selection function

Passing

Stopping

Pass-Band

Low-Pass

High-Pass

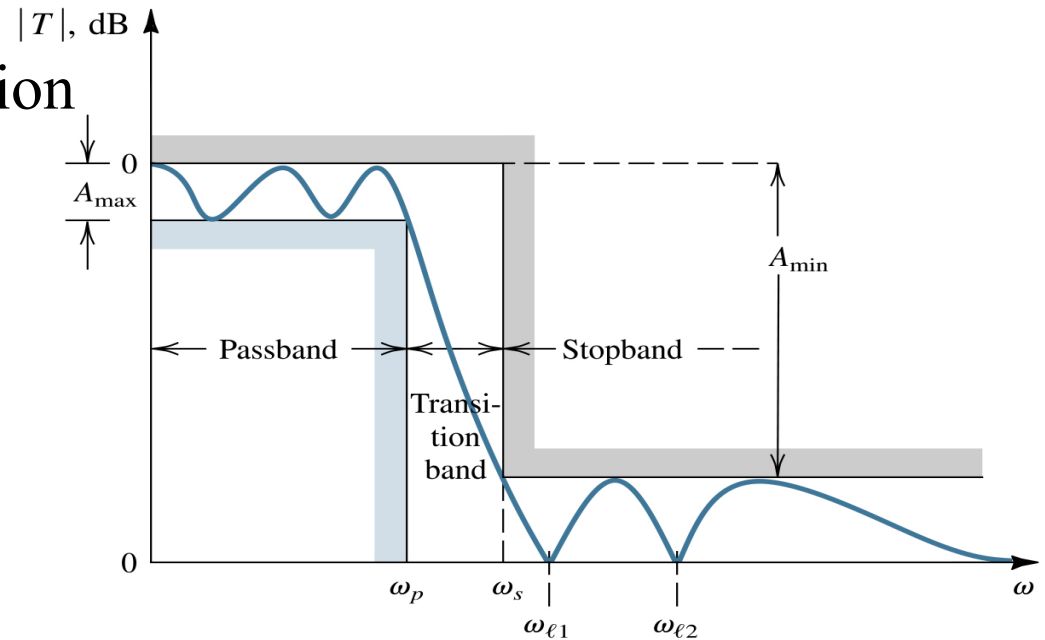
Band-Pass

Band-Stop

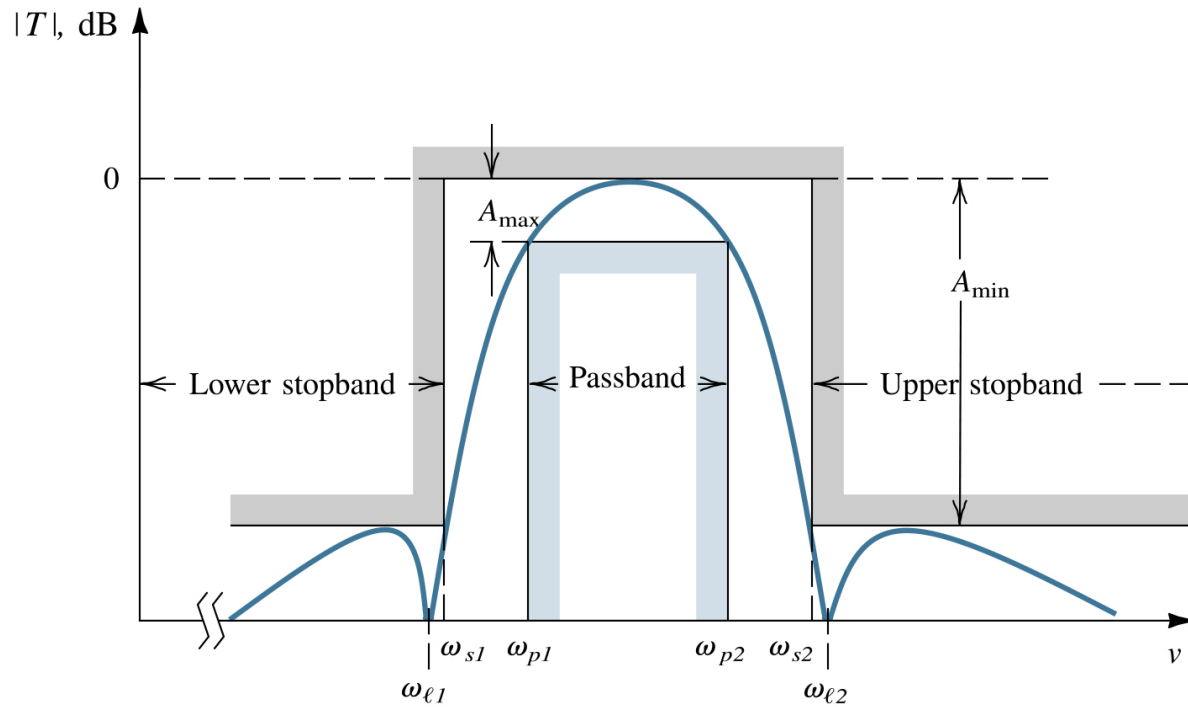
Band-Reject

Passband ripple

Ripple bandwidth

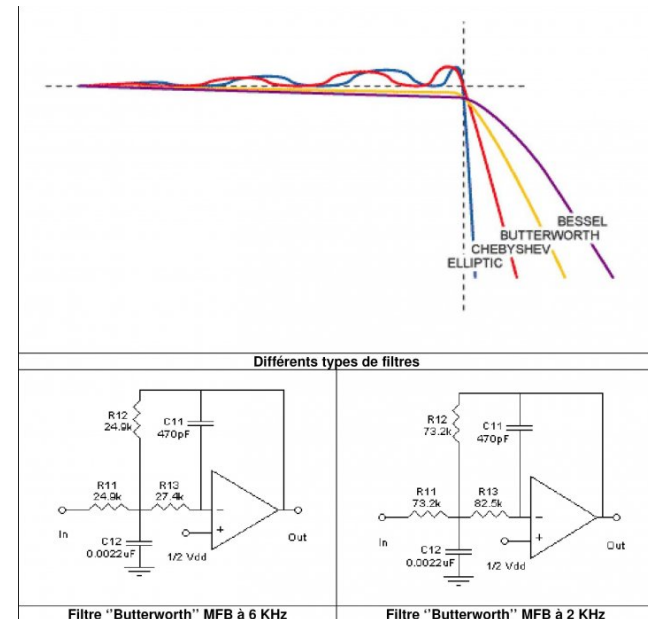


# Filter Specification



# Filtres

- Analogique : se divisent en passives et actives en fonction de la partie hardware utilisé : RLC ou A.O.

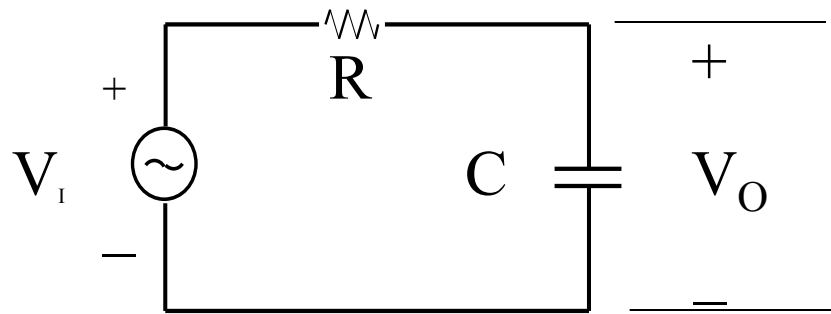


- Numériques : Implémentés en utilisant une structure numérique : DSP, microprocesseur permettant de calculer la convolution, la FFT





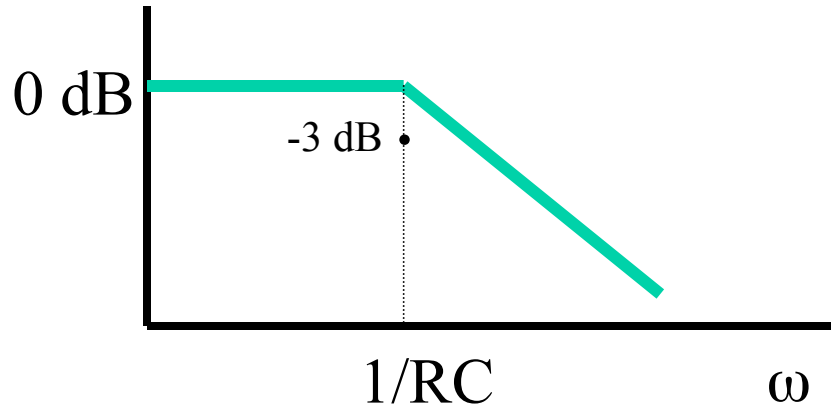
# Filtre Passe-Bas Passif et Analogique



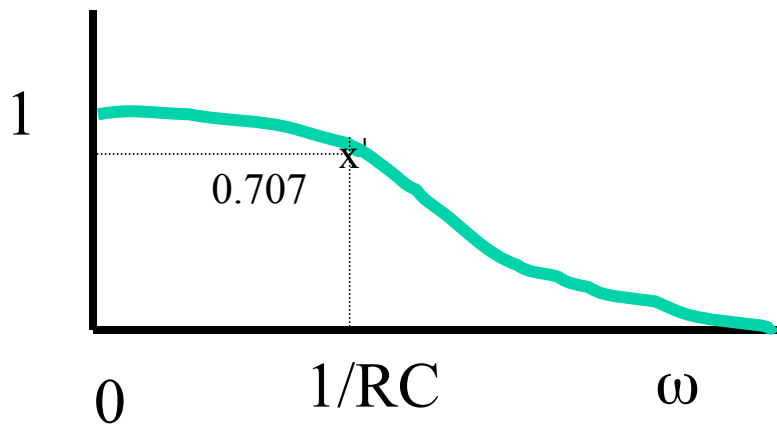
Low pass filter circuit

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

# Filtre Passe-Bas Passif et Analogique

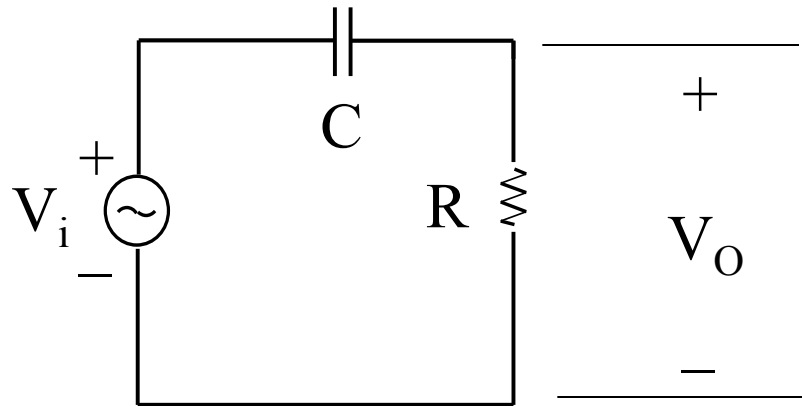


Bode



Lineair

# Filtre Passe-Haut Analogique Passif



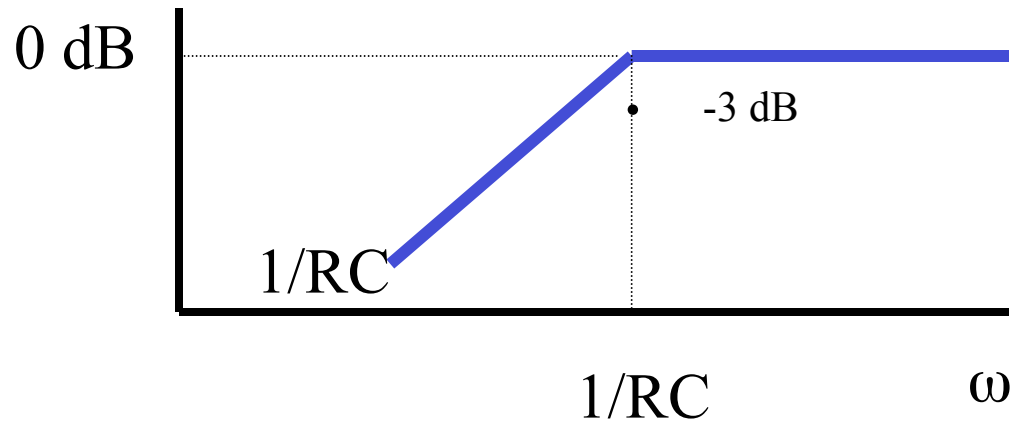
En anglais  
High Pass Filter

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

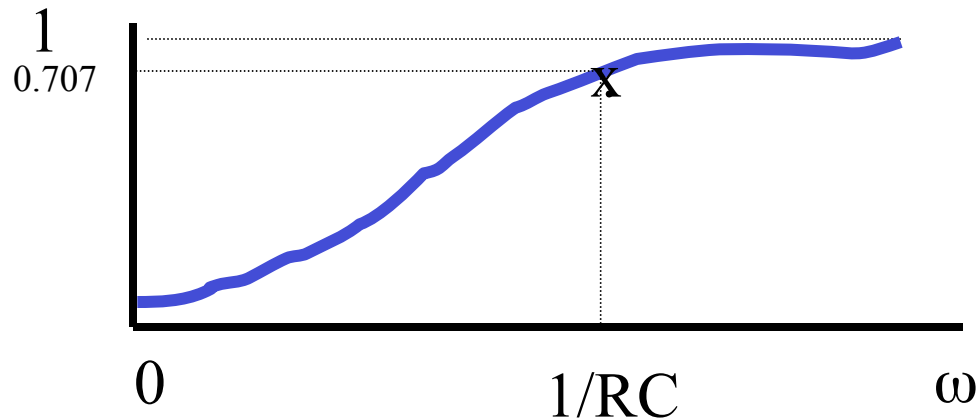
# Filtre Passe-Haut

High Pass Filter

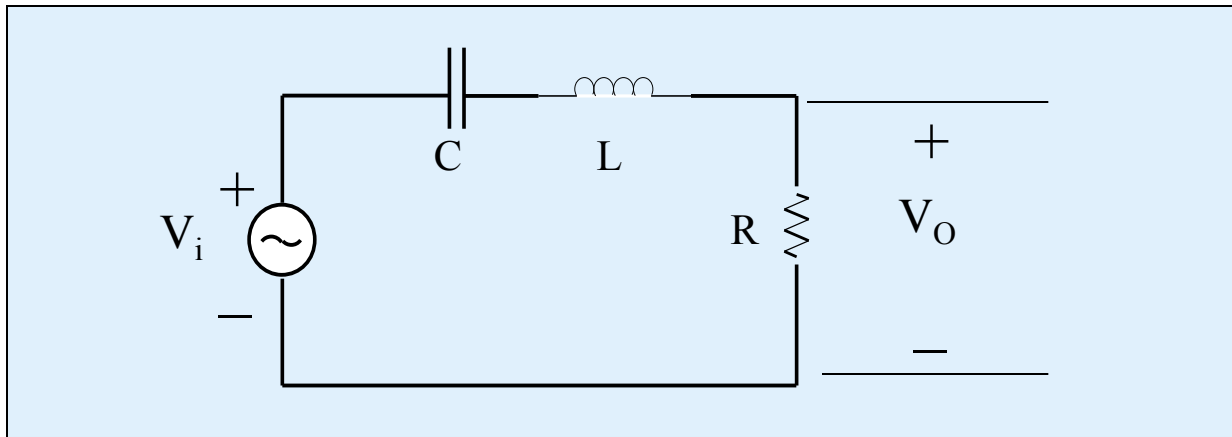
Bode



Linear

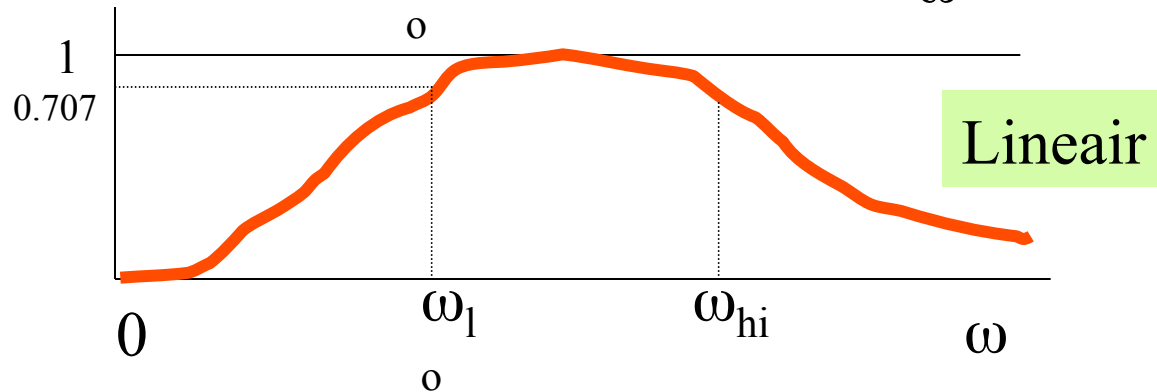
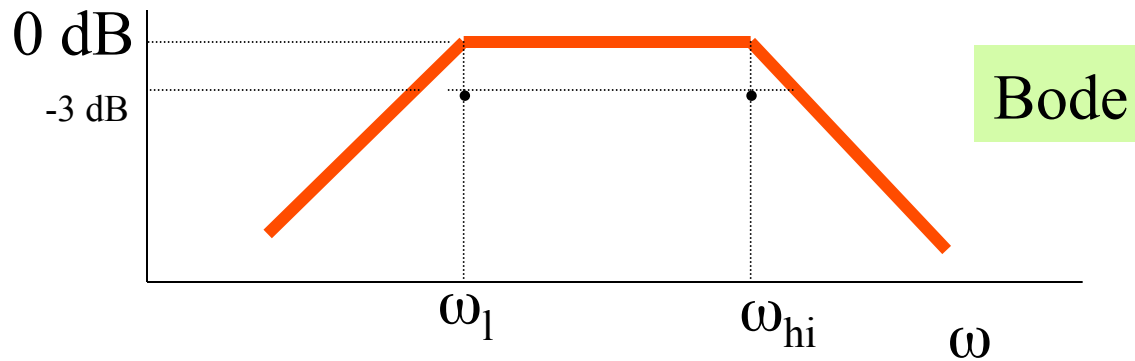


# Filtre Passe-Bande Passif



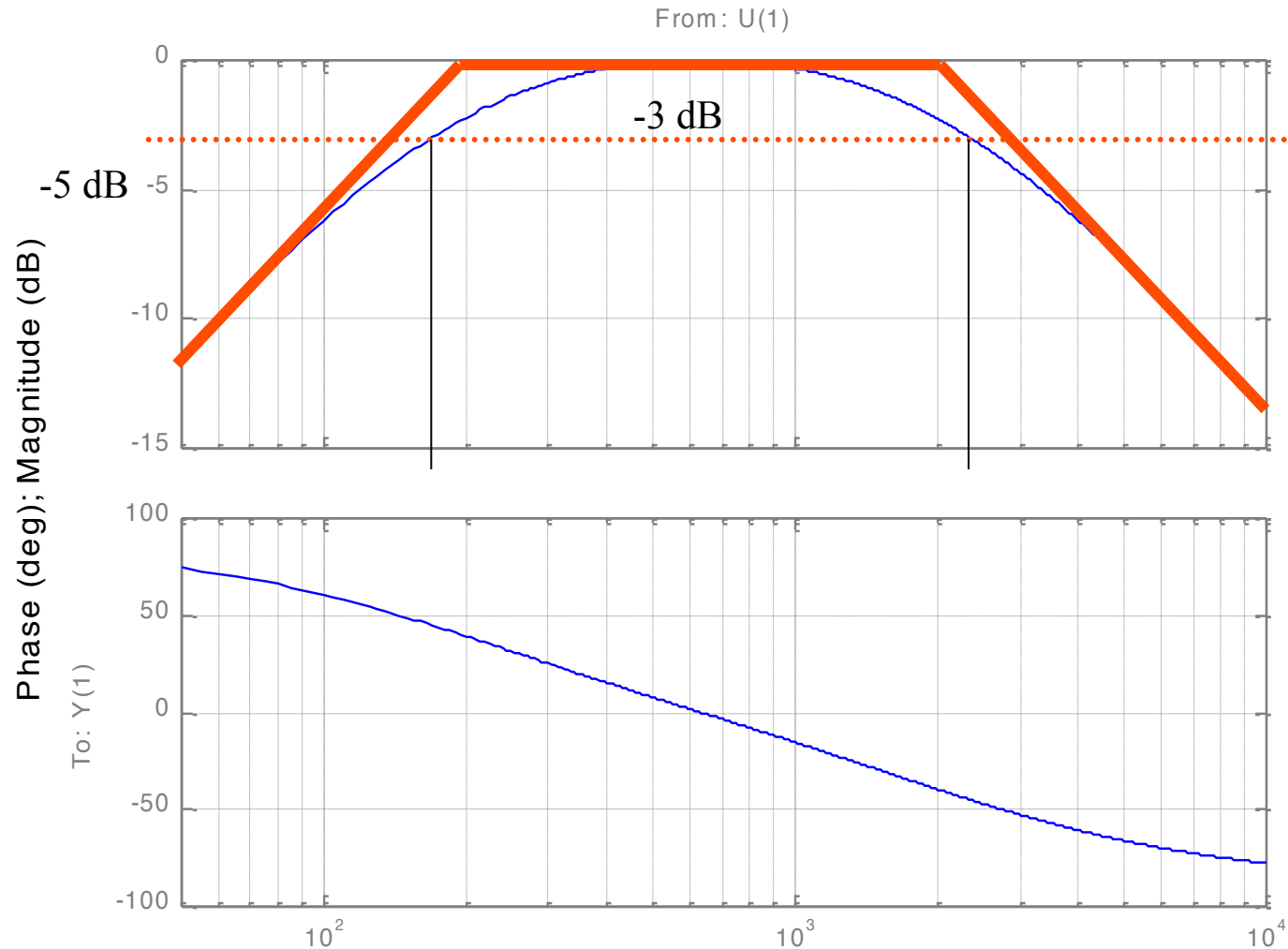
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

# Filtre Passe-Bande Passif



# Filtre Passif et Analogique

Bode Diagrams



# Filtre Passe-Bande

## Exemple Matlab

```
N = 10;          %order butterworth ordre 10

[ZB, PB, KB] = buttap(N);
numzb = poly([ZB]);
denpb = poly([PB]);

wo = 600;  bw = 200;      % wo freq centrale
                        % bw bandwidth
[numbbs,denbbs] = lp2bs(numzb,denpb,wo,bw);

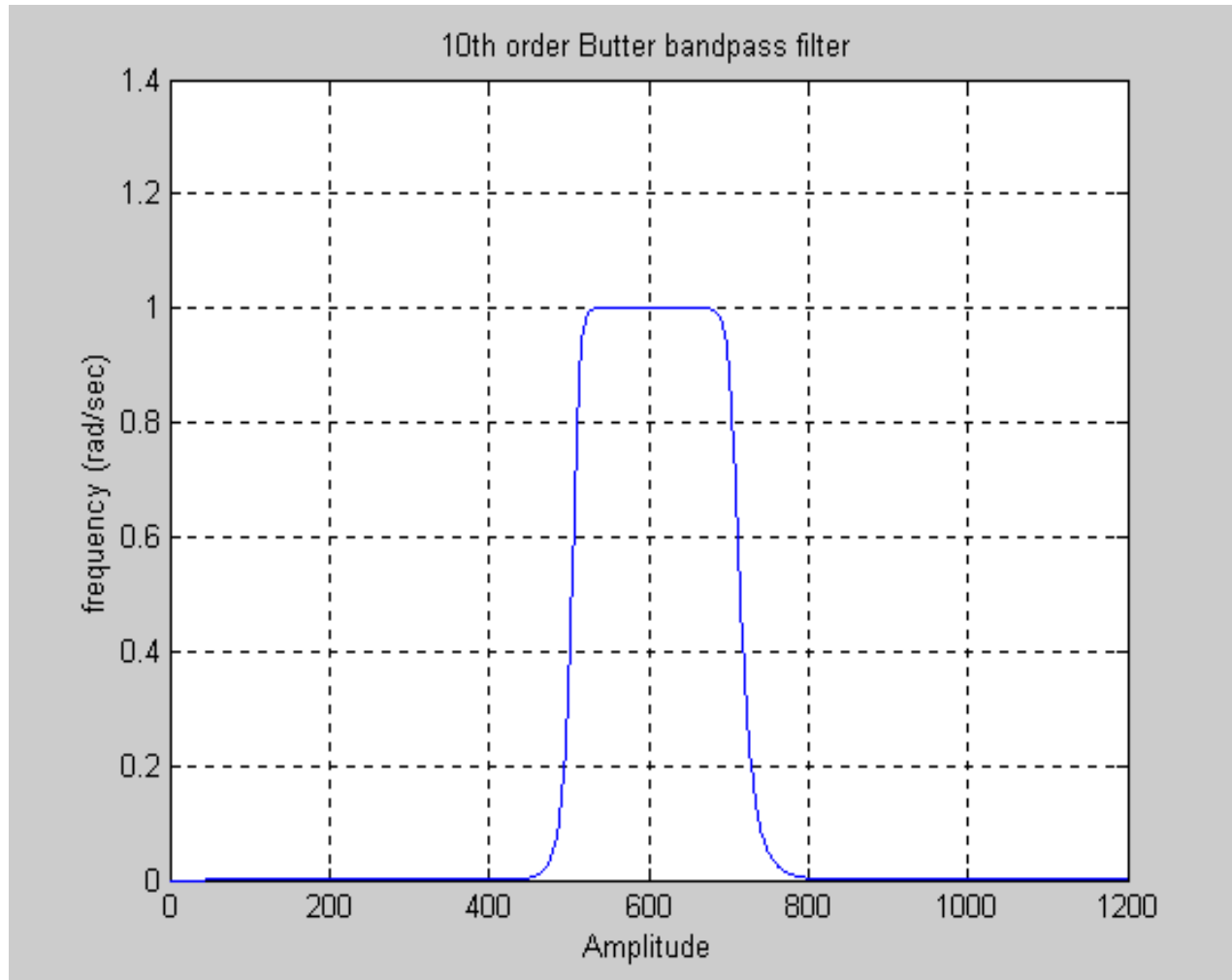
w = 1:1:1200;

Hbbs = freqs(numbbs,denbbs,w);
Hb = abs(Hbbs);

plot(w,Hb)
grid
xlabel('Amplitude')
ylabel('frequency (rad/sec)')
title('10th order Butterworth filter')
```



# Butterworth



# Filtre Rejecteur

## Exemple

```
num = [1 0 300000];
```

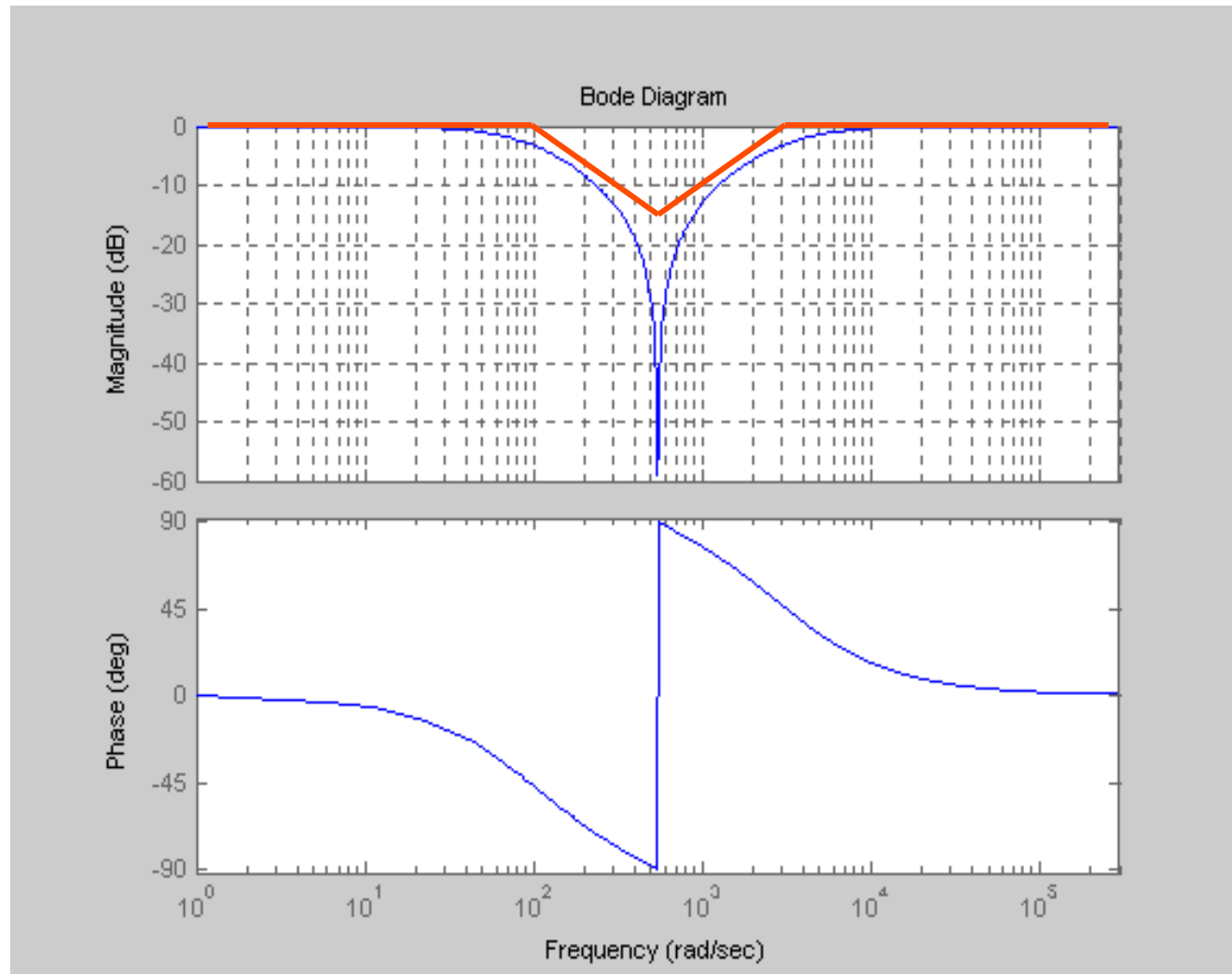
```
den = [1 3100 300000];
```

```
w = 1 : 5 : 10000;
```

```
Bode(num,den,w)
```

# Filtre Rejecteur

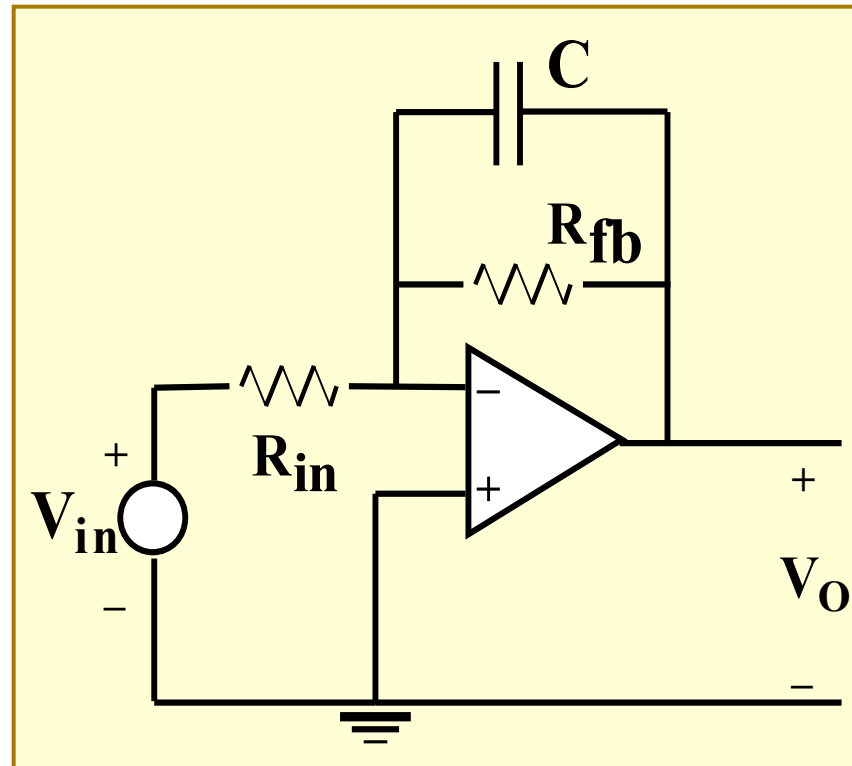
Exemple



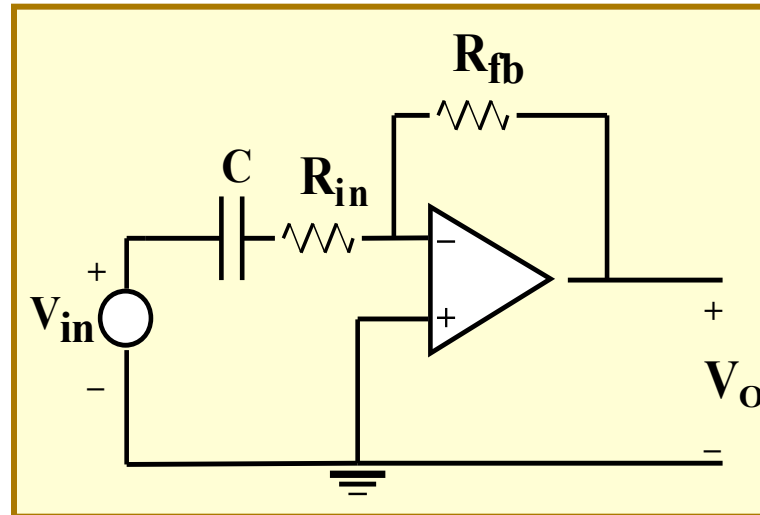
— Bode

— Matlab

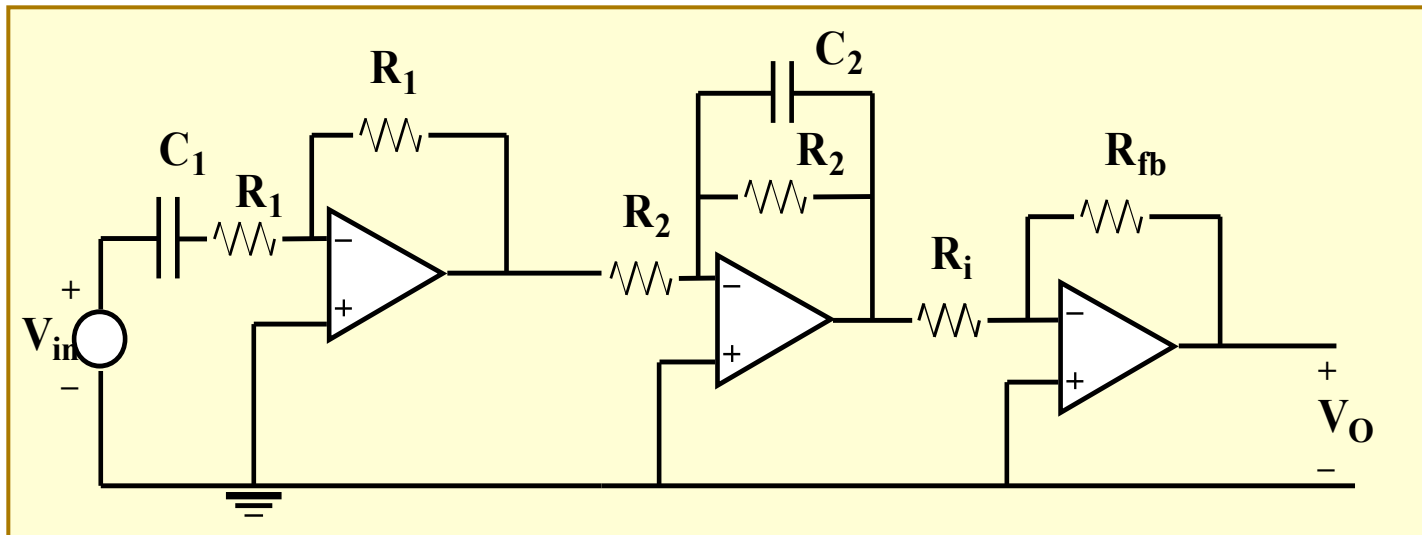
# Filtre Passe-Bas Actif



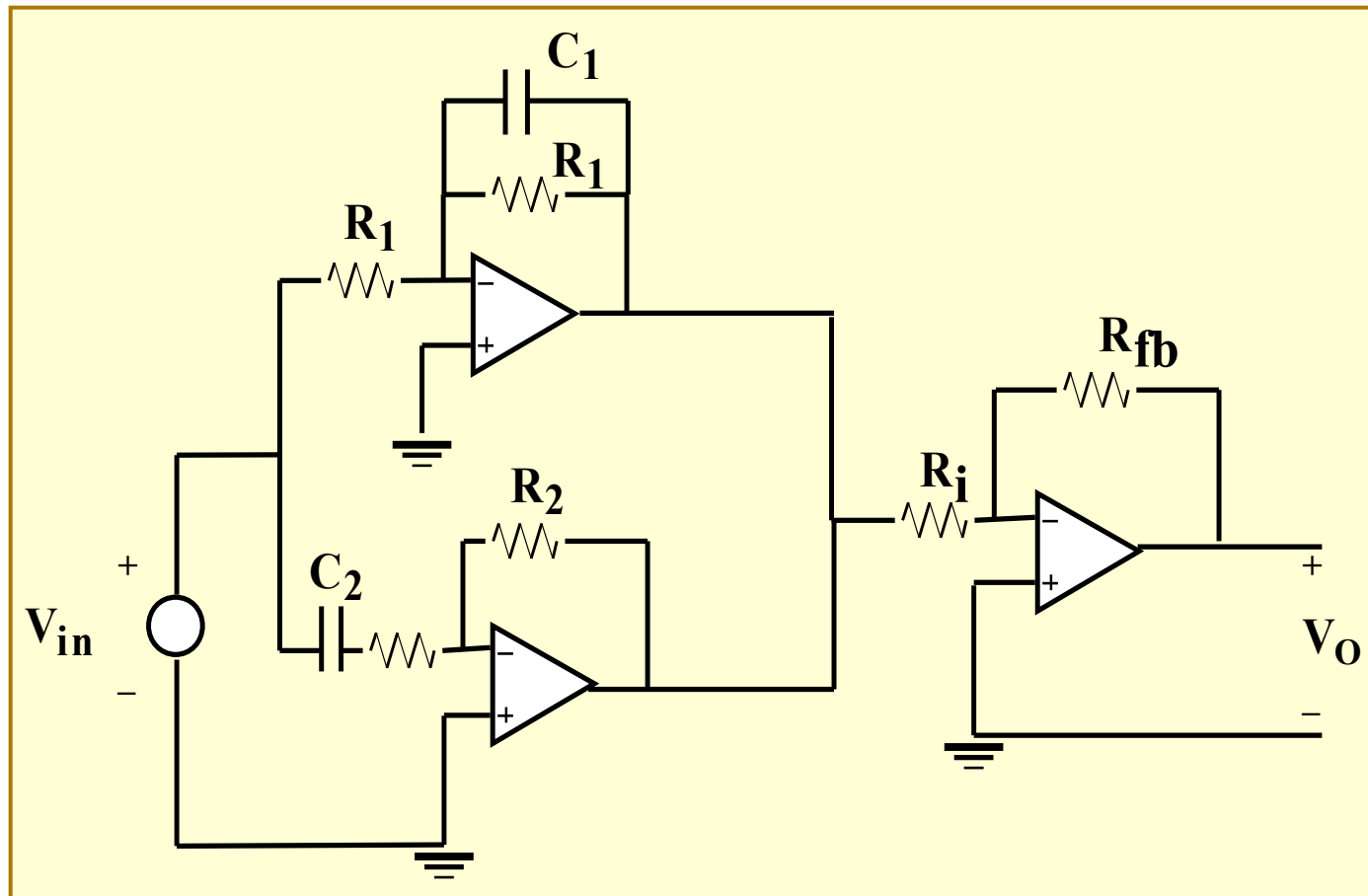
# Filtre Passe-Haut Actif

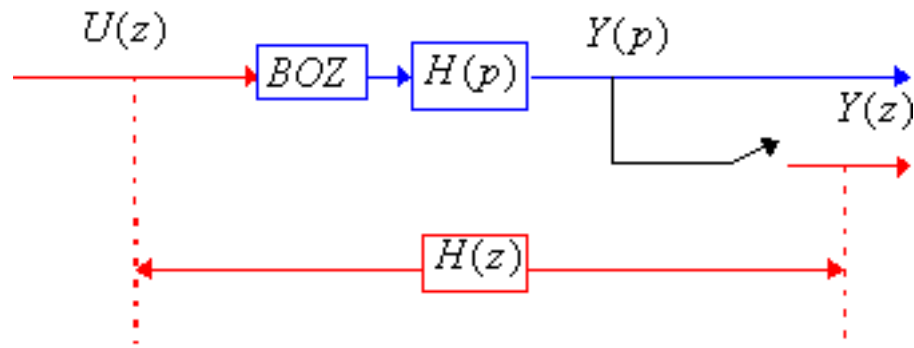


# Filtre Passe-Bande Actif



# Filtre Rejecteur





La Transformée en  $z$

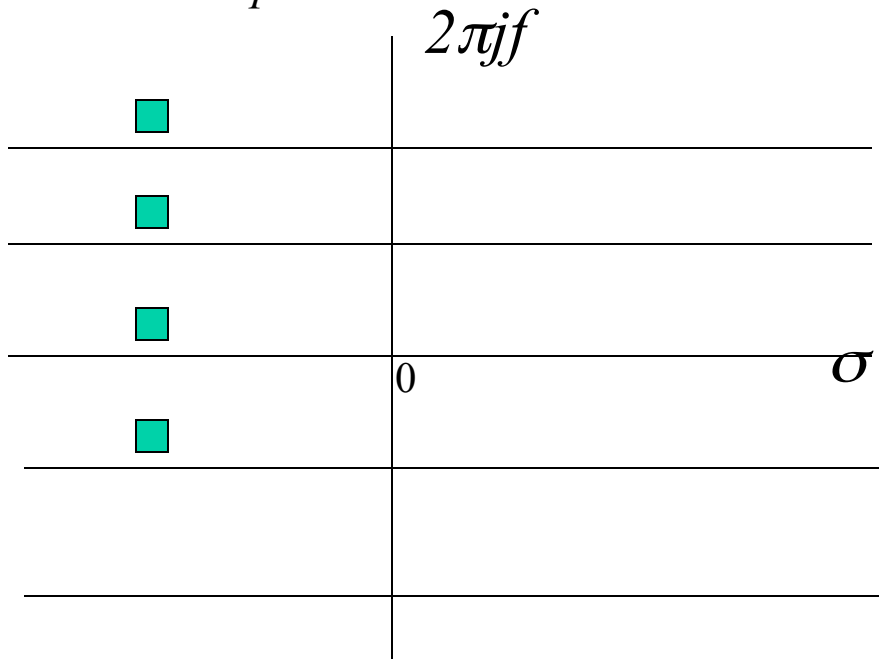


# Lien avec la Transformée de Laplace

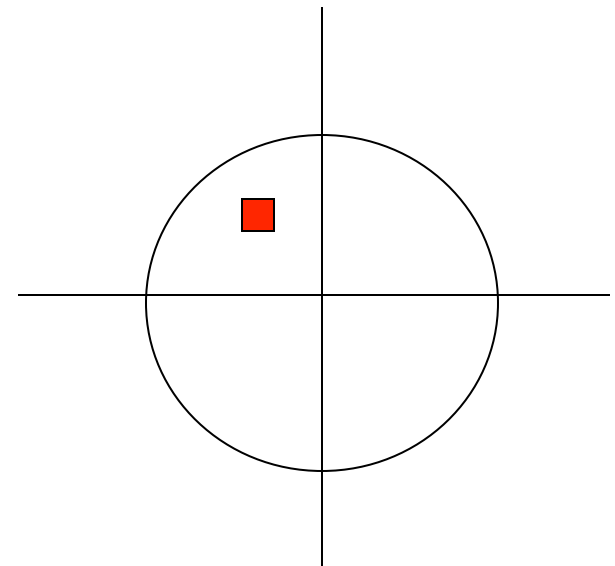
- Pour  $p = \sigma + 2\pi jf$ ,  $\sigma$  l'amortissement et  $f$  fréquence

$$Tz\{x(n)\} = TL\{x(n)\}\big|_{z=e^{pt}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) e^{-npTe} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) z^{-n}$$

*Plan de Laplace*



*Plan des  $\{z\}$*

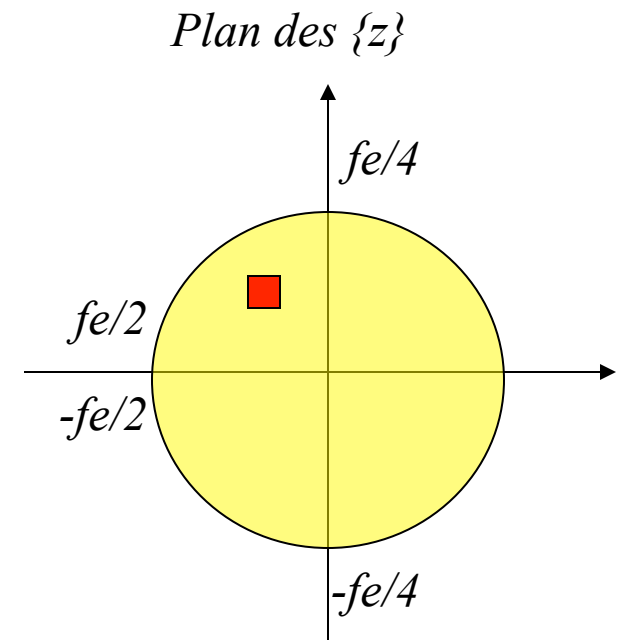
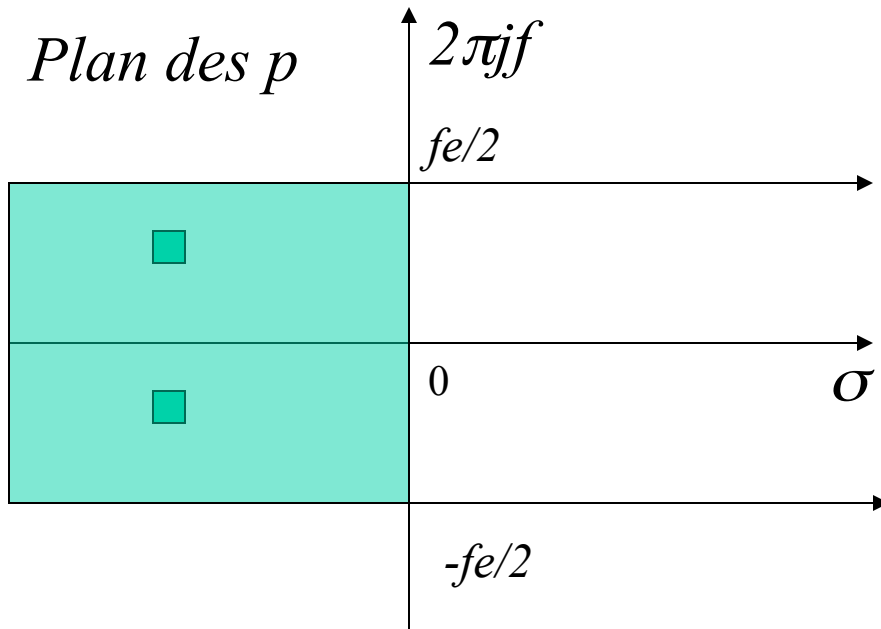


# Plan Transformée en Z

$$p = \sigma + j2\pi f$$

$$f \in \left[ \left(k - \frac{1}{2}\right)f_e, \left(k + \frac{1}{2}\right)f_e \right] \text{ et } \sigma < 0 \quad \longrightarrow$$

$$z = e^{\sigma t} e^{j2\pi f T_e}$$



# Représentation par la Transformée en z

- Définition

On appelle transformée en z bilatérale d'une suite  $\{x(n)\}$ , la somme  $X_b(z)$  définie par :

$$X_b(z) = T_z b = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) z^{-n}$$

Remarque :

On peut considérer la transformée monolatérale:

$$X_b(z) = T_z b \{ x(n) \} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

# Propriétés

- Linéarité

$$w(n)=ax(n)+by(n)\Leftrightarrow W(z)=aX(z)+bY(z)$$

- Shift (retard ou avance)

$$x(n - n_0) \Leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$$

- Inversion dans le temps

$$x(-n) \Leftrightarrow X(z^{-1})$$

**Attention au domaine de convergence**

# Propriétés

- Multiplication par une exponentielle

$$\alpha^n x(n) \Leftrightarrow X(\alpha^{-1} z)$$

- Convolution

$$y(n)=x(n)*h(n)\Leftrightarrow Y(z)=X(z)H(z)$$

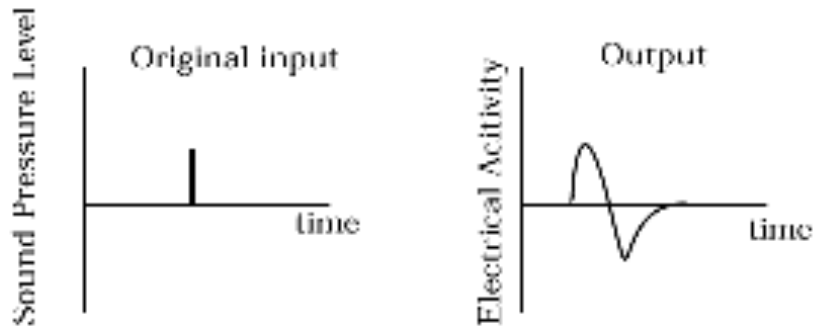
- La transformée en z n'a pas de sens que si l'on précise le domaine de convergence

*Le domaine de convergence d'un signal causal est un ????*

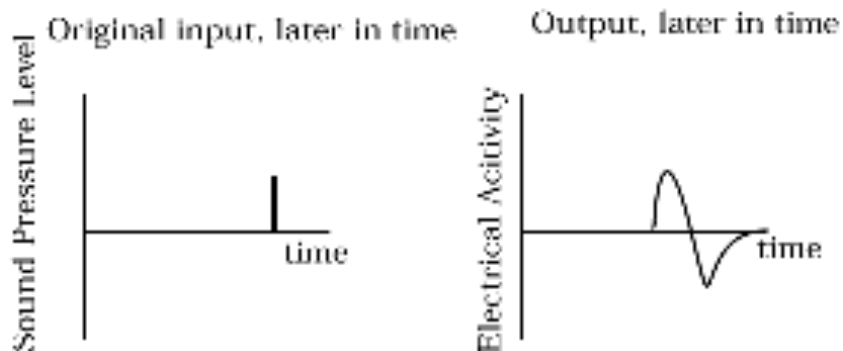
# Systemes lineaires invariants

- Définition

Shift-Invariance Rule



$$Lx(k)=y(k) \quad Lx(k-k_0)=y(k-k_0)$$



# Signaux Déterministes

- Dans un contexte de logique câblée ou programmée, il est immédiat de créer certains signaux déterministe:

$$x(n)=rect_N(n)$$

$$x(n)=triang_N(n)$$

- Par contre il est moins facile de créer des signaux plus élaborés comme par exemple:

$$y(n)=a \exp(\alpha n) \cos(2\pi f_0 n T_e) u(n)$$

# Systèmes discrets

- Un système est discret lorsque toutes les grandeurs variables du système sont des signaux discrets.
- La réponse du système ne dépend pas uniquement des signaux discrets d'entrée mais aussi de l'état interne du système, donc nous avons une relation de récurrence



# Systèmes discrets

- Si le système est linéaire et invariant dans le temps nous avons l'équation de type récurrence :

$$\sum_{n=0}^N b_n y(k-n) = \sum_{m=0}^M a_m x(k-m)$$

Exemple (l'importance des conditions initiales)

$$\begin{aligned} y(k) &= 0 \quad \forall k < 0 \\ x(k) &= u(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= x(0) - ay(-1) = 1 \\ y(1) &= x(1) - ay(0) = 1 - a \\ y(2) &= 1 - ay(1) = 1 - a + a^2 \\ y(k) &= \frac{1 - (-a)^{k+1}}{1 + a} u(k) \end{aligned}$$

# Relation de récurrence et transformée en z monolatérale

- Considérons la relation de récurrence:

$$y(n) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) = 0 \quad b_1 \text{ et } b_2 \text{ ctes}$$

- La Transformée en z est :

$$Y^+(z) = - \frac{\{b_1 y(-1) + b_2 y(-2)\} + \{b_2 y(-1)\} z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

# La Transformée en z Inverse

- Basée sur l'intégrale de Cauchy
- Méthode d'identification par “inspection”
  - Décomposition en fractions simples
  - Identification de la série géométrique

Exemple: Calculer la transformée z inverse de :

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

# Transformée en z inverse

- Supposons que la TZ se présente sous la forme :

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

- Développement en fractions simple :

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^s \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}$$

- Le premier terme existe si  $M > N$ 
  - $B_r$  est obtenu par division longue
- Le deuxième terme représente les pôles simples
- Le troisième terme représente les pôles multiples
- Chaque terme permet d'obtenir le TZ inverse par identification

# Développement en Fraction

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^s \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}$$

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=d_k}$$

- Coefficients sont :

$$C_m = \frac{1}{(s-m)! (-d_i)^{s-m}} \left\{ \frac{d^{s-m}}{dw^{s-m}} \left[ (1 - d_i w)^s X(w^{-1}) \right] \right\}_{w=d_i^{-1}}$$

# Transformée z inverse d'un 2eme ordre

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \quad \text{ROC : } |z| > \frac{1}{2}$$

$$X(z) = \frac{A_1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{A_2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

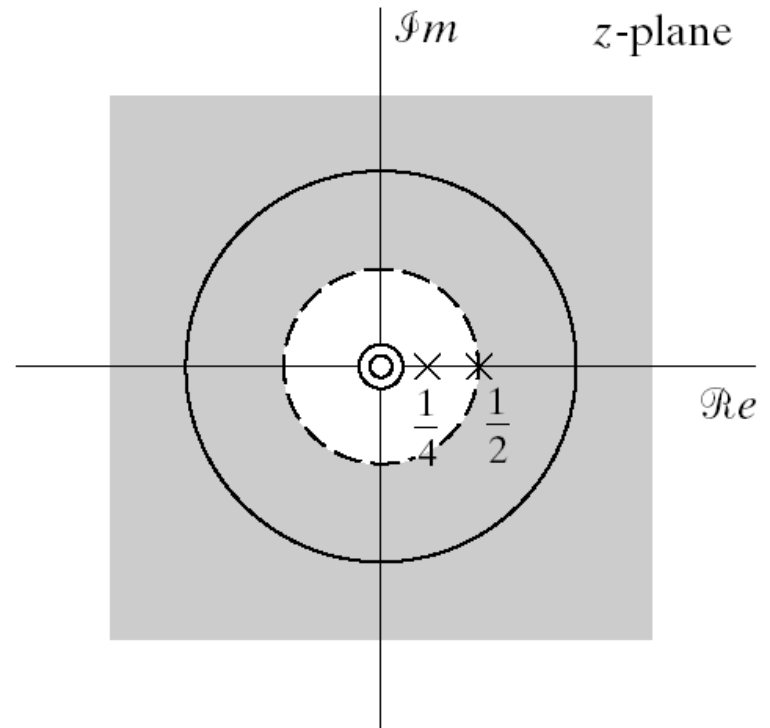
$$A_1 = \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right)} = -1$$

$$A_2 = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)} = 2$$

$$X(z) = \frac{-1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

- ROC extension

$$x[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$



# Génération des signaux numériques

- Relation de récurrence :

$$x(k) = a x(k-1) \quad x(0) = 1 \quad x(k) = \begin{cases} a^k & k \geq 0 \\ 0 & \text{en rest} \end{cases}$$

- Générer un signal sinusoïdal

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(kb+b) &= \sin(kb)\cos(b) + \cos(kb)\sin(b) \\ \cos(kb+b) &= \cos(kb)\cos(b) - \sin(kb)\sin(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k)\cos(b) + y(k)\sin(b) \\ y(k+1) &= y(k)\cos(b) - x(k)\sin(b) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k)=\sin(kb) \\ y(k)=\cos(kb) \end{cases}$$



# Modèle Linéaire Discrets

Soit, l'équation linéaire, aux différences finies

$$\sum_{l=0}^{L-1} b_l y(n-l) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k x(n-k)$$

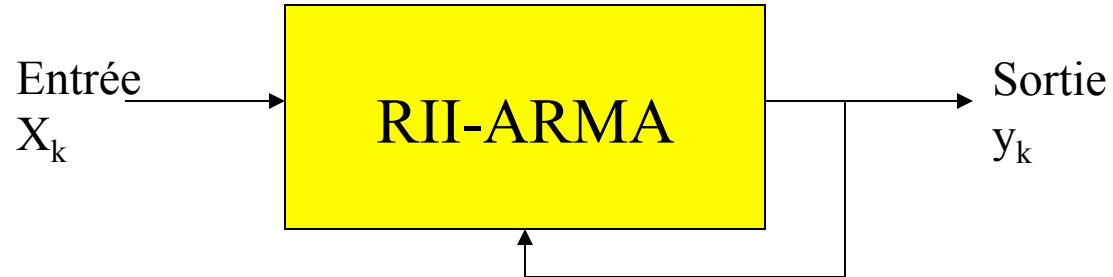
Est un modèle *ARMA* d'ordre  $(K,L)$

## Questions:

1. Quel l'ordre minimal  $(K,L)$  qui permette de représenter le signal de façon convenable ?
2. Comment déterminer les  $\{a_k\}$  et les  $\{b_l\}$  ? Ces coefficients restent-ils invariants lorsque l'on considère différentes réalisation du signal ?

# Filtres

- Filtres récurrents



- Filtres non-récurrents



# Stabilité des Modèles ARMA

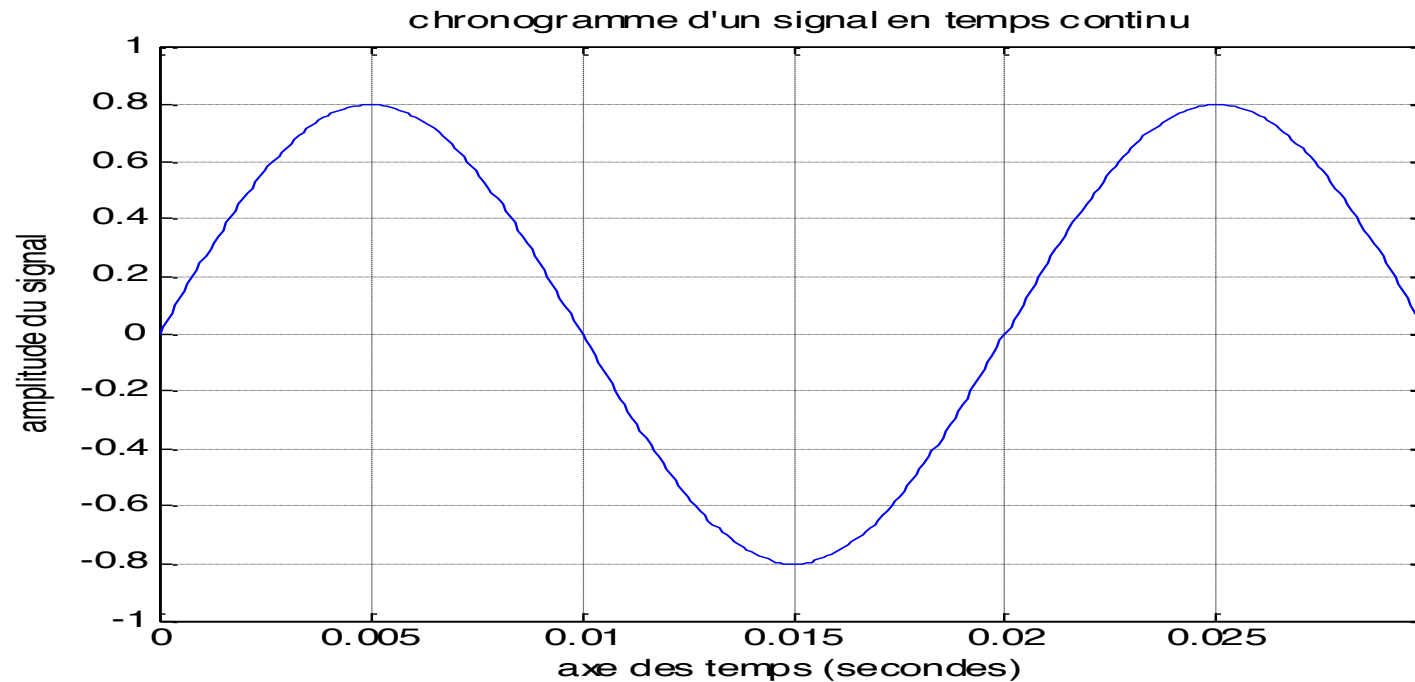
- La CNS pour qu'un système linéaire, de réponse impulsionnelle  $\{h(n)\}$  soit stable est que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty \text{ sommabilité}$$

- La stabilité d'un système *AR* ou *ARMA* exige que les pôles de la fonction de transfert  $H(z)$  soient à l'intérieur du cercle unité du plan  $\{z\}$

# Filtrage Numérique

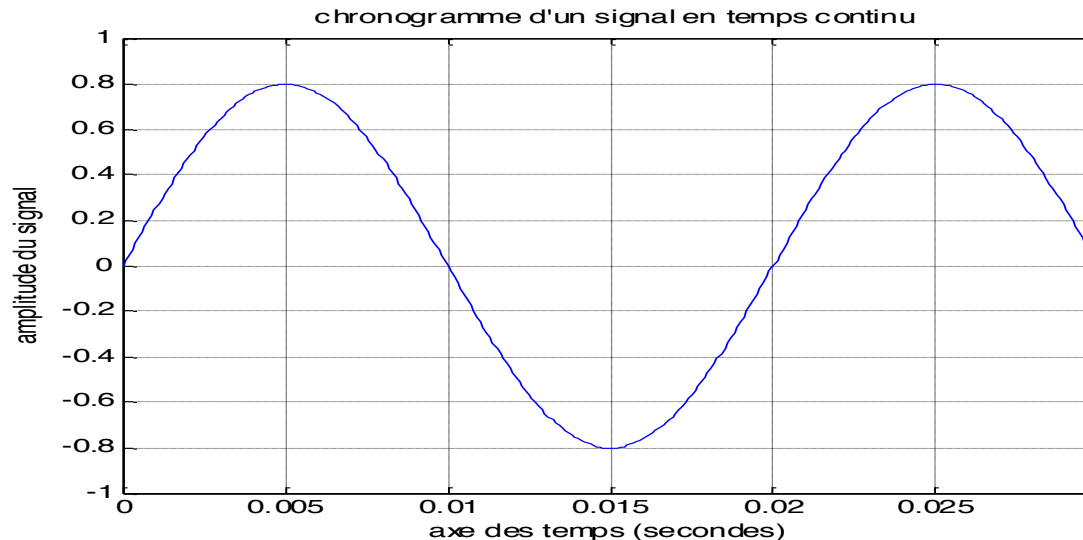
# MATLAB 3: signal sinusoidal



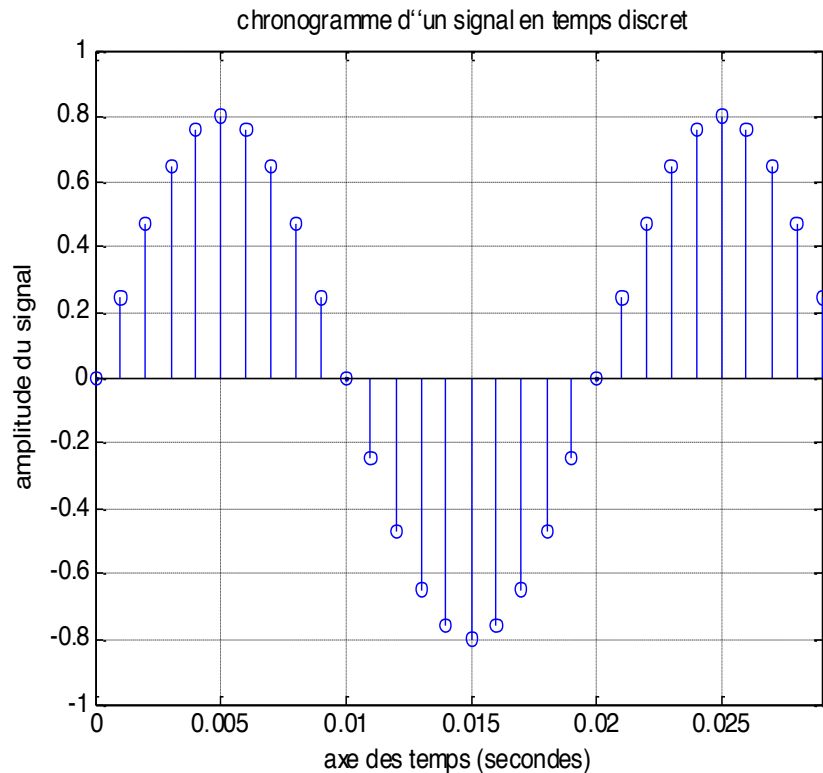
- Amplitude : 0.8
- Durée : 0.03 seconde
- Période : 0.02 seconde
- Fréquence :  $1/0.02 = 50\text{Hz}$
- Signal **analogique** et (en temps) **continu**
- Expression :  $s(t) = 0.8 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t / 0.02)$

# script Matlab

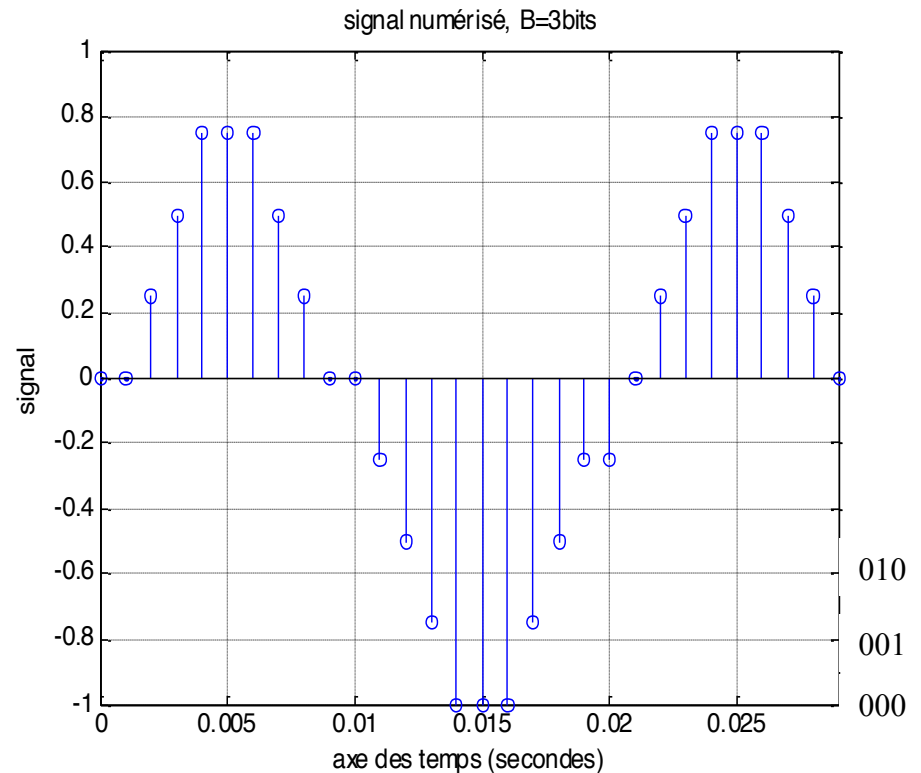
```
% créer et afficher le signal sinusoïdal précédent
freq= 50; % en Hertz (Hz)
ampl= 0.8; % ';' signifie ne pas afficher le résultat
temps= [0:1:299]/10000; % définir vecteur temps(secondes)
signal= ampl*sin(2*pi*freq*temps); % créer vecteur signal
plot(temps, signal) % trace la courbe signal(temps)
axis([0, temps(length(temps)), -1, 1]) % définir les axes
grid % tracer la grille
title('chronogramme d'un signal en temps continu')
xlabel('axe des temps (secondes)')
ylabel('amplitude du signal')
```



# signal discret, signal numérique.

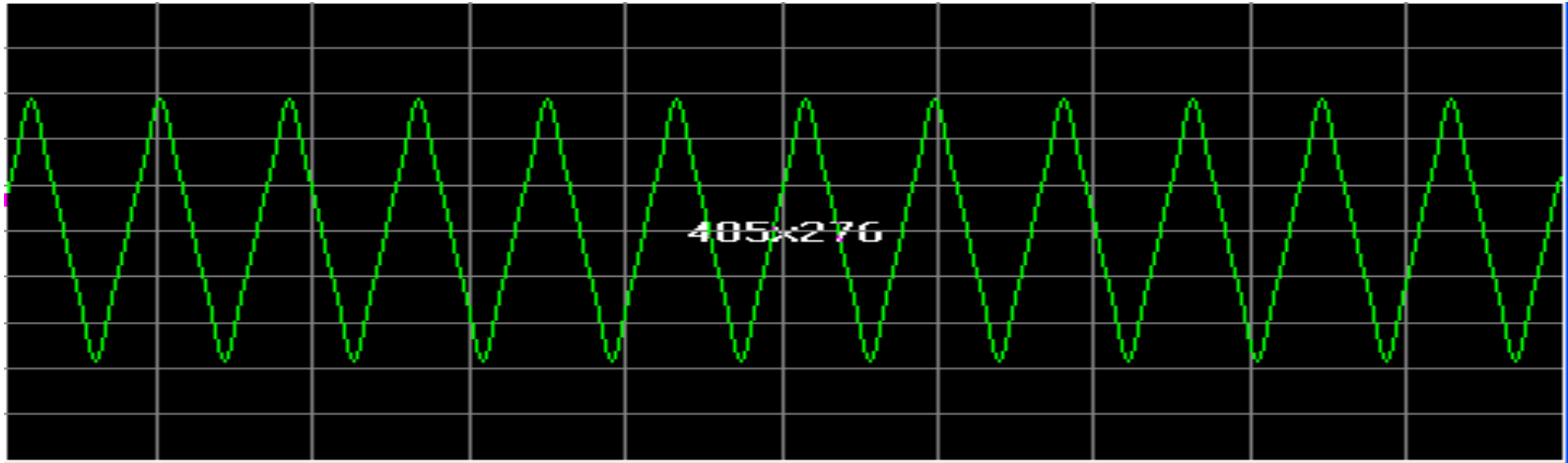


- période d'échantillonnage :  $T_e = 0.001s$
- fréquence d'échantillonnage  $f_e = 1000Hz$
- $20 T_e$  par période
- Signal en temps **discret** et **analogique**



- nombre de bits par échantillon :  $B = 3$
- 8 niveaux de quantification
- pas de quantification :  $Q = 0.25$
- erreur de quantification  $0 < \varepsilon < 0.25$
- Signal **numérique** et en temps **discret**

# Composition fréquentielle.



Le chronogramme ci-dessus a été tracé par Goldwave à partir de l'expression mathématique :

$$s(t) = \frac{\cos(400\pi t)}{2} + \frac{\cos(1200\pi t)}{18} + \frac{\cos(2000\pi t)}{50}$$

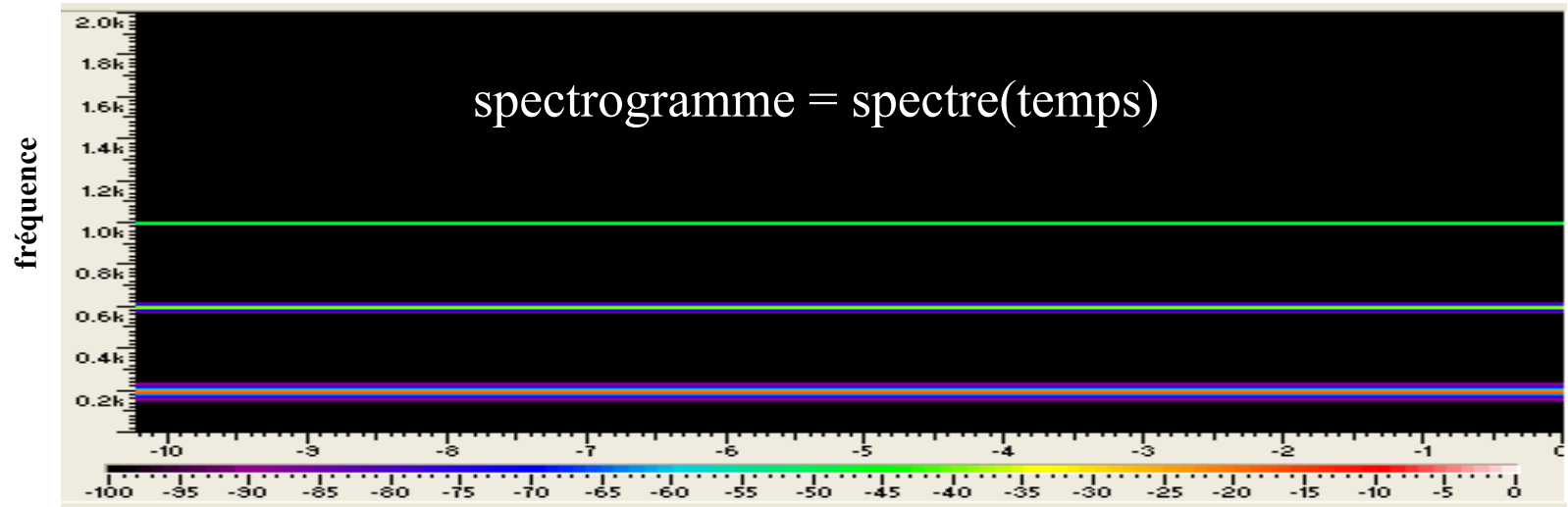
*200Hz*                      *600Hz*                      *1000Hz*

Le signal  $s(t)$  est composé des trois fréquences *200*, *600* et *1000Hz*

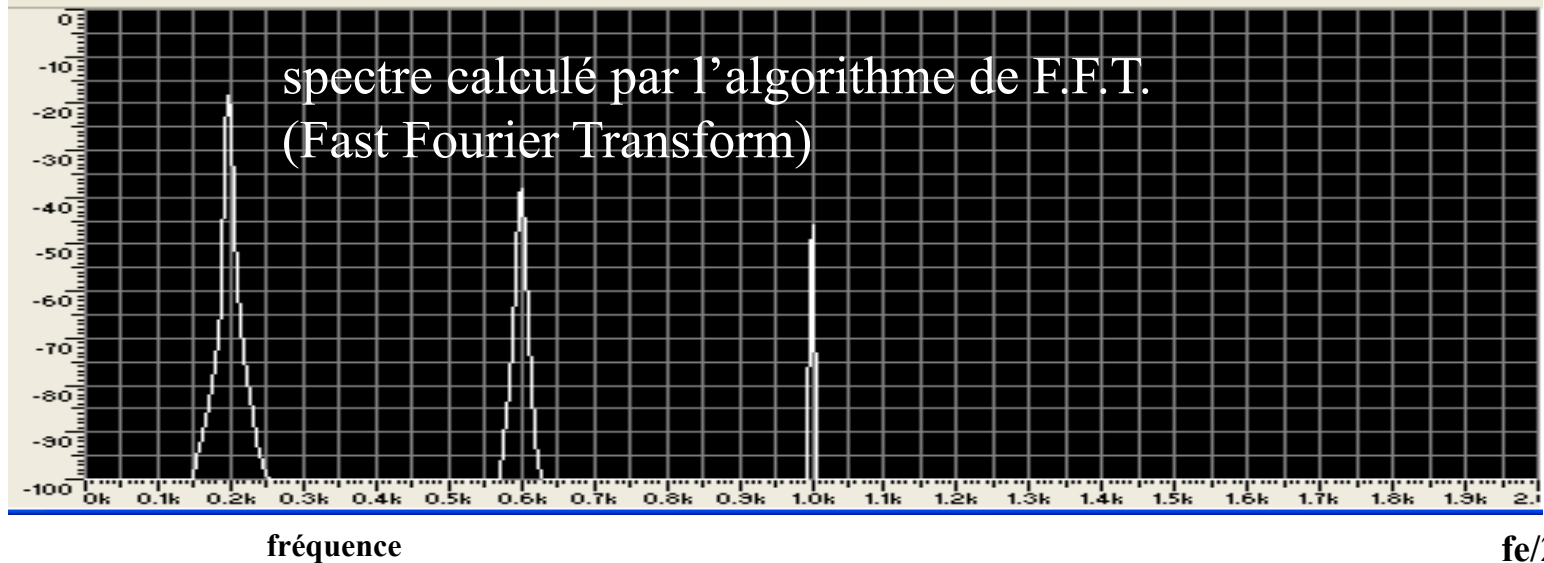


# MATLAB : spectre et spectrogramme du signal $s(t)$

fe/2



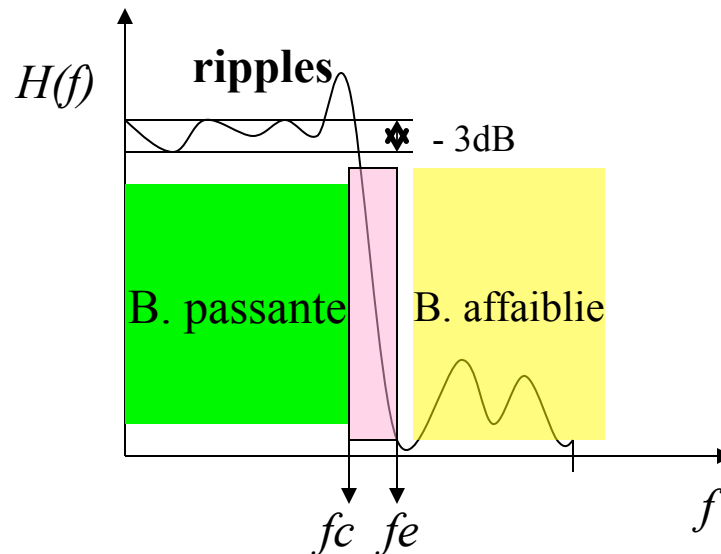
amplitude  
en dB



fe/2

# Gabarit d'un filtre

- Pour un filtre passe-bas, est conduit à introduire 3 régions
  - **Bande passante**, plage de fréquences où le gain prend des valeurs comprises entre  $(1-\delta_p, 1+\delta_p)$  où  $\delta_p$  est le taux d'ondulation
  - **Bande de transition**, plage de fréquence où le gain s'atténue dans un rapport  $A$ .
  - **Bande affaiblie**, plage de fréquences où le gain prend des valeurs inférieurs à  $\delta_s$



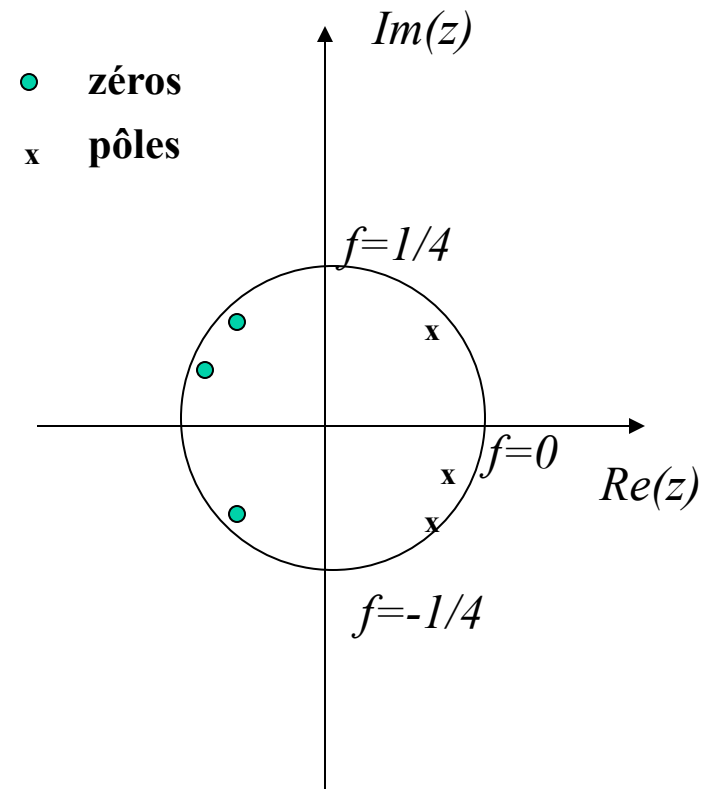
- La partie du plan complexes où se trouvent les zéros correspond à la bande affaiblie. Plus les zéros sont proches du cercle unité, plus l'atténuation est grande. Plus le nombre de zéros est grand, plus les ondulations dans la bande affaiblie pourront être rendues faibles.

• Le lien entre le gabarit et la position des pôles et des zéros.

– Le cercle unité est gradué en valeur de la fréquence qui varie entre  $-1/2$  et  $1/2$

– Si les pôles et les zéros sont complexes conjugués  $|H(j\omega)|$  est paire

– La partie du plan complexe où se trouvent les pôles correspond à la bande passante. Plus les pôles sont proches du cercle unité, plus les surtensions sont grandes. Plus les pôles sont grandes, plus les ondulations dans la bande passante pourront être rendues faibles.



# Synthèse d'un filtre réel à temps continu

- **Problème :**

Comment réaliser en numérique un filtrage analogique ?

- *Donc, si  $x_a(t)$  et  $y_a(t)$  sont les signaux d'entrée et de sortie d'un filtre analogique: comment fabriquer les échantillons de  $y_a(t)$  à partir de ceux de  $x_a(t)$  ?*

# Solution :

- Soit le filtrage linéaire réel analogique défini par l'équation en fréquence :

$$Y_a(f) = H_a(f) X_a(f)$$

Si  $X_a(f) = 0$  pour  $|f| > B$ , alors  $Y_a(f)$  est lui-même à bande limitée  $B$ . On prend  $F_e = 1/T_e > 2B$

- L'expression des échantillons  $y_e(n) = y_a(nT)$  en fonction des échantillons  $x_e(n) = x_a(nT_e)$  s'écrit

$$y_e(n) = x_e(n) * \tilde{h}_e(n) \Leftrightarrow Y_e(e^{2j\pi n f}) = X_e(e^{2j\pi n f}) \tilde{H}_e(e^{2j\pi n f})$$

Où  $\tilde{H}_e(e^{2j\pi n f})$  est la périodisée de  $H_a(f F_e) \text{rect}_{(-b, b)}(f)$  où  $b = B/f_e$

# Conclusion

- C'est donc un filtrage à temps discret dont la réponse en fréquence s'obtient par troncature de  $H_a$  à la bande  $(-B, B)$  suivie d'une division de l'axe des fréquences par  $F_e$

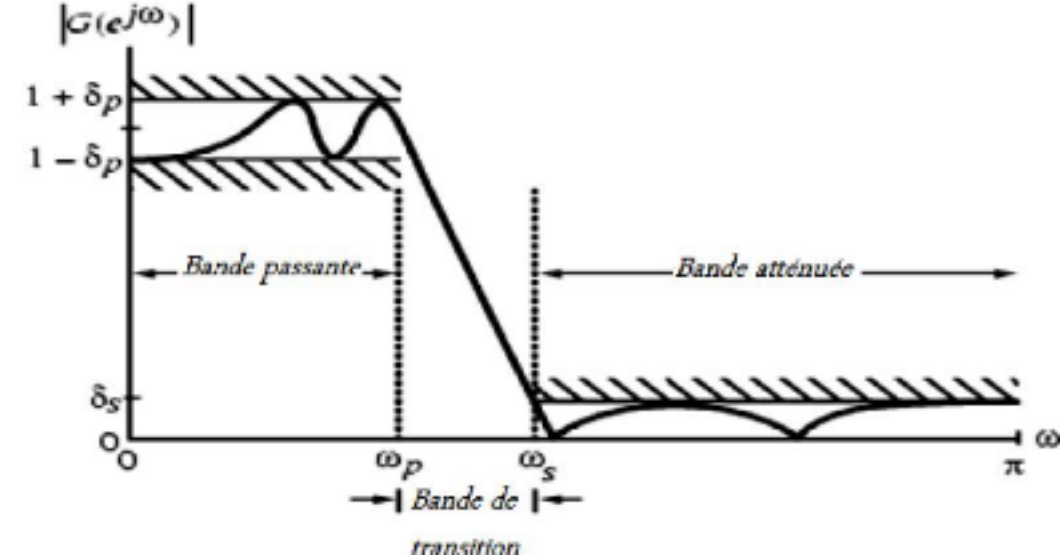
# Preuve

- En utilisant la formule de Poisson:

$$\begin{aligned} Y_e(e^{2j\pi f}) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_e(n) e^{2j\pi f n} = F_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} Y_a((k-f)F_e) \\ &= F_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_a((k-f)F_e) X_a((k-f)F_e) \end{aligned}$$

Et en posant  $\tilde{H}_a(f) = H_a(fF_e) \text{rect}_{(-b,b)}(f)$  on a :

$$Y_e(e^{2j\pi f}) = F_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_a((k-f)F_e) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{H}_a((k-f)F_e)$$



# ANALYSE DES FILTRES NON RECURSIFS OU RIF

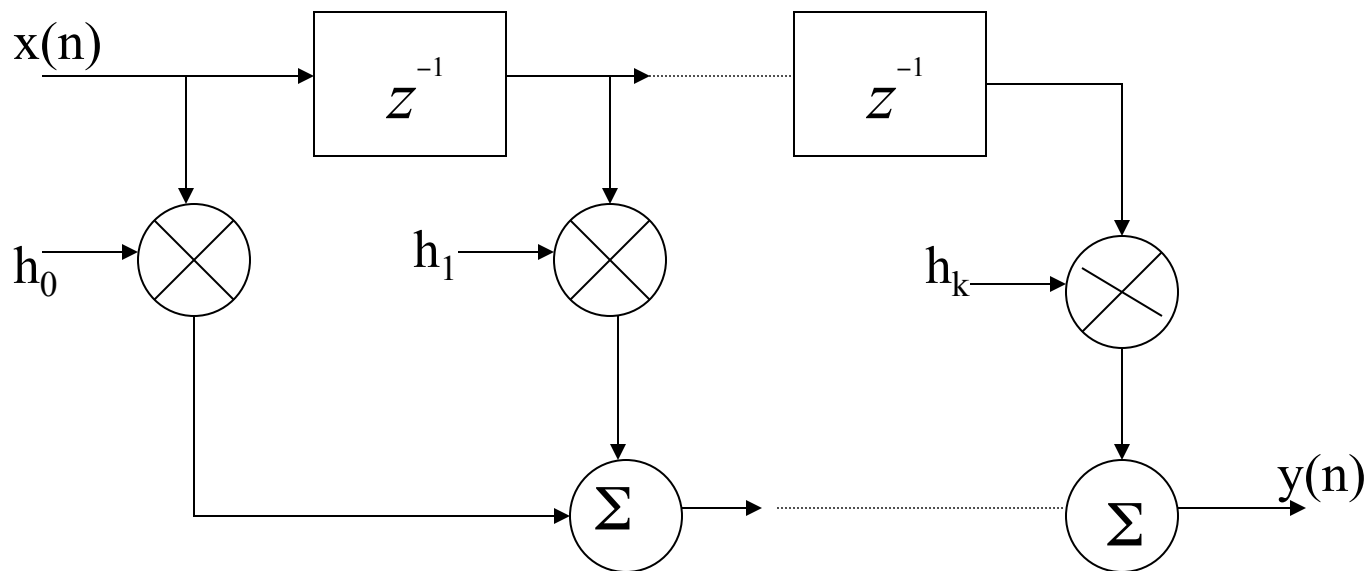


# Caractéristiques des RIF

- Équations mathématiques :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k}$$



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_N z^{-N}}{1}$$

# Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

$$y_n = h_0 x_n + \dots + h_{L-1} x_{n-L+1}$$

**Stabilité** : un filtre RIF est stable

**Phase linéaire**: si la réponse impulsionnelle vérifie

$$h_L = h_{N-L} \quad \forall L \in [0, N]$$

**Remarque**: conséquence directe de la symétrie de la réponse impulsionnelle

# Démonstration de la phase linéaire

- $N=7$
- $h(n)=h(N-1-n)$  ou  $h(n)=-h(N-1-n)$   
 $h(0) = h(6) ; h(1) = h(5) ; h(2) = h(4)$

$$H(\omega) = H(e^{j\omega T}) = \sum_{k=0}^6 h(k)e^{-jk\omega T}$$

$$H(\omega) = e^{-j3\omega T} (h(0)(e^{j3\omega T} + e^{-j3\omega T}) + h(1)(e^{j2\omega T} + e^{-j2\omega T}) + h(2)(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}))$$

# Exemple

- Considérons le filtre RIF, dont la réponse :

$$h_0=h_3, \quad h_1=h_2 \text{ et } h_n=0 \text{ pour } n \neq \{0,1,2,3\}$$

Sa réponse en fréquence est :

$$\begin{aligned} H(e^{j2\pi f}) &= h_0 + h_1 e^{-j2\pi f} + h_2 e^{-j4\pi f} + h_3 e^{-j6\pi f} \\ &= e^{-j3\pi f} (h_0 \cos(-3\pi f) + h_1 \cos(-6\pi f)) \end{aligned}$$

# Filtre Design

- Spécifications du filtre
- Calcul des coefficients
- Réalisation
- Analyse de la quantification des coefficients du filtre
- Implémentation

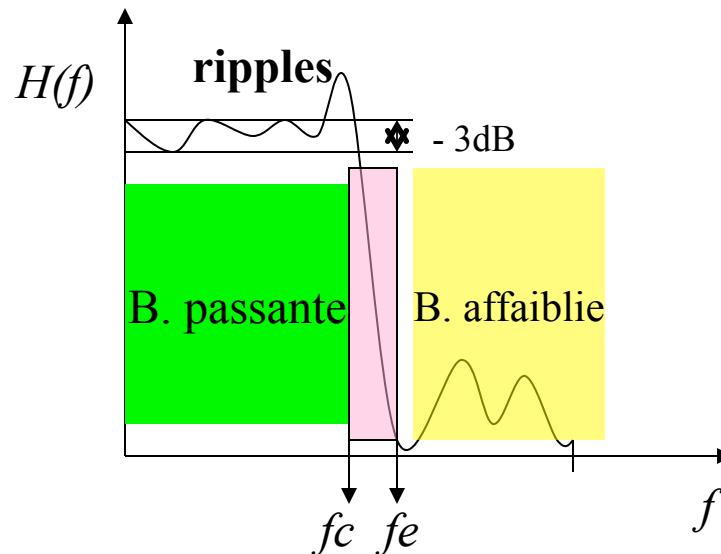
# Spécifications :

Soit un filtre passe-bas utilisé pour la réduction du bruit physiologique :

- *La bande passante 10Hz*
- *La bande d'arrêt  $< 20 \text{ Hz}$*
- *L'atténuation dans la bande d'arrêt  $< 30\text{dB}$*
- *Les oscillation dans la bande passante « ripple »  $< 0.026 \text{ dB}$*
- *La fréquence d'échantillonnage 256 Hz*

# Gabarit d'un filtre

- **Bande passante**, plage de fréquences où le gain prend des valeurs comprises entre  $(1-\delta_p, 1+\delta_p)$  où  $\delta_p$  est le taux d'ondulation
- **Bande de transition**, plage de fréquence où le gain s'atténue dans un rapport  $A$ .
- **Bande affaiblie**, plage de fréquences où le gain prend des valeurs inférieurs à  $\delta_s$





# Synthèse RIF passe-bas par la méthode de la fenêtre

- On veut construire un filtre numérique idéal réel de bande  $b \in (0, 1/2)$  définie par :

$$H(e^{j2\pi f}) = \text{rect}_{(-b, b)}(f)$$

- Donc 
$$h_n = \int_{-b}^b e^{j2\pi n f} df = \frac{\sin(2n\pi b)}{n\pi} \quad h_o = 2f_c$$

- La meilleure approximation de longueur  $2N+1$  est :

$$g_n = \begin{cases} h_n & \text{si } n \in [-N, \dots, N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque: cette troncature introduit des lobes dans la réponse en fréquence

# Fenêtre de pondération

- Le fait de ne conserver de la suite infinie  $h(n)$  qu'un nombre fini de termes revient à la multiplier par une fonction rectangle de largeur  $N$  et donc à convoluer  $H(f)$  par la fonction :

$$W_r = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-jN\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)} e^{-j\pi(N-1)f}$$

# Algorithme

1. On se donne le gain complexe  $H(f)$  à réaliser et le nombre  $N$  de coefficients du filtre
2. On détermine les coefficients  $h(n)$  par la formule précédente en limitant le calcul à  $N$  valeurs réparties de façon symétrique autour de  $n$
3. On multiplie terme à terme la suite obtenue par une suite  $w(n)$  appelée fenêtre de pondération

# Synthèse RIF passe-bande à partir d'un RIF passe-bas

- Soit  $h_n$  la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas de bande B.
- Considérons le filtre de réponse impulsionnelle:

$$g_n = 2h_n \cos(2\pi f_0 n) = h_n e^{2j\pi f_0 n} + h_n e^{-2j\pi f_0 n}$$

- Par TFD on en déduit que l'expression du gain complexe de  $g_n$ :

$$G(e^{2j\pi f}) = H(e^{2j\pi(f+f_0)}) + H(e^{2j\pi(f-f_0)})$$

- **Conclusion** : Si  $h_n$  est filtre passe-Bas de bande B,  $g_n$  est un *passe-bande* centré autour de  $f_0$  de bande 2B

# Fenêtre de pondération

- Sont des fenêtres qui présentent des lobes secondaires de moindre amplitudes.
- Conséquence: l'élargissement de la bande de transition.
- Exemple: Hamming

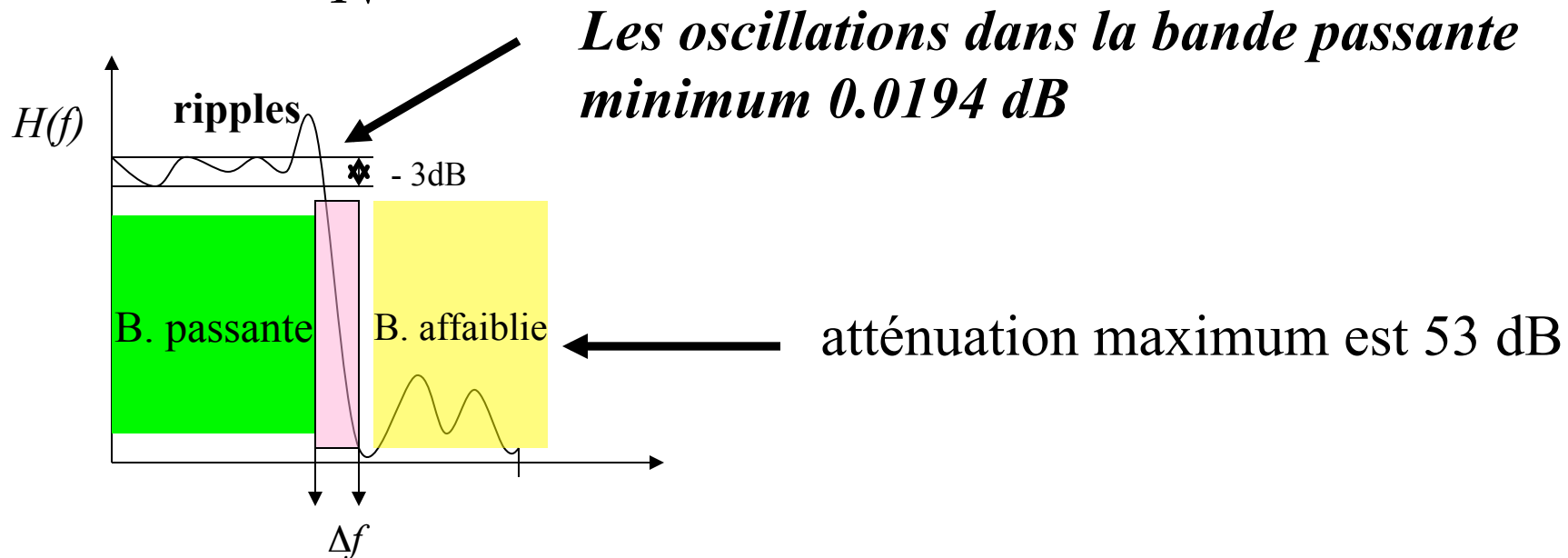
$$w_H(n) = 0.54 + 0.46 \cos(2\pi n/N) \text{ où } n \in \{-N/2, \dots, N/2\}$$

$$g_n = h_n \times w_n$$

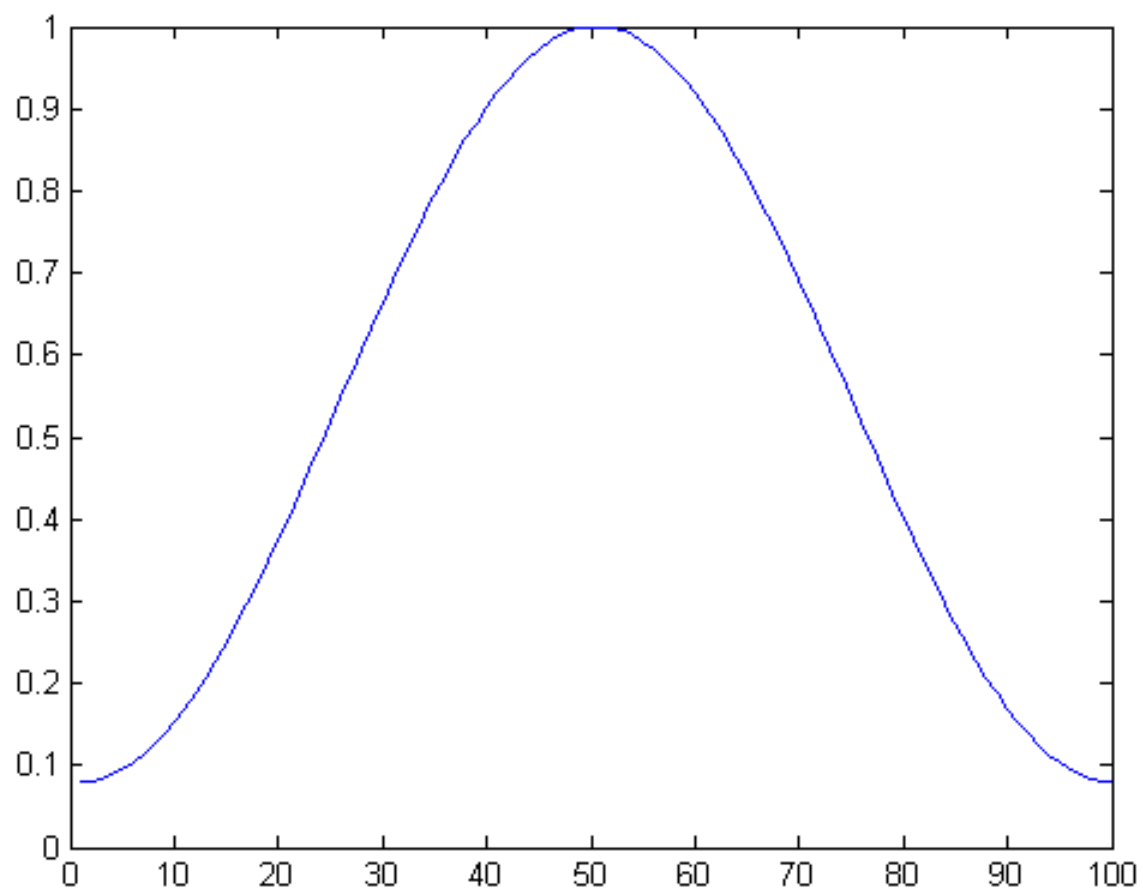
- Remarque: la pondération utilisée conserve la symétrie de la fenêtre et donc la propriété de phase linéaire

# Relation pour la fenêtre de Hamming

$$\Delta f = \frac{3.3}{N}$$



# Hamming



# Différentes fenêtres

Fenêtre	Ltransition	Ripple	Lobe principal	Attenuation dans la bande stop	Function
Rectang.	$0.9/N$	0.7416	13	21	1
Hanning	$3.1/N$	0.0546	31	44	$0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	$3.9/N$	0.0194	41	53	$0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	$5.5/N$	0.0017	57	75	
Kaiser					



# Signification physique des coefficients $b_i$

Considérons une impulsion :

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Et la relation de récurrence :

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \dots$$

$$a_0 = a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = a_3 = \dots = 0$$

$$y(-1) = 0$$

$$y(0) = a_0$$

$$y(1) = a_1$$

$$y(2) = 0$$

$$y(3) = 0$$

# Remarques

- On peut dire que la suite  $a_0, a_1, \dots$  constitue la réponse du filtre à une impulsion
- Le milieu de la réponse a pour abscisse :

$$\tau = \frac{T_e}{2}$$

- On peut estimer que le filtre introduit un retard et que la réponse impulsionnelle est symétrique par rapport à ce point.

# Exemple

- Supposons que l'on veuille faire un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_c$ ,

On peut prendre

- Réponse de ce filtre :

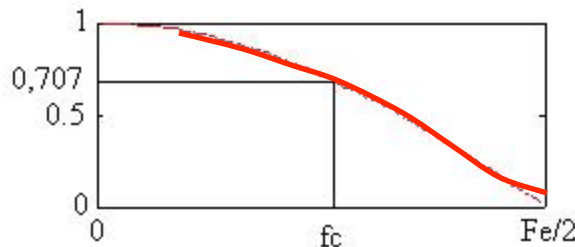
$$S(z) = \frac{1}{2} E(z) + \frac{1}{2} E(z) z^{-1}$$

$$s_n = \frac{1}{2} e_n + \frac{1}{2} e_{n-1}$$

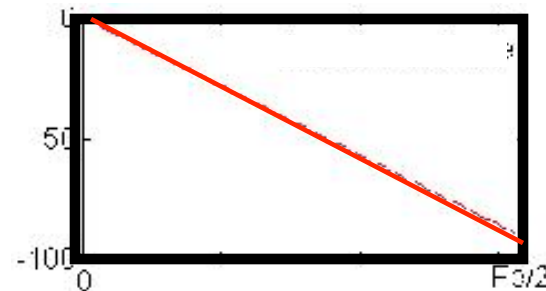
$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^{-1}$$

- On a donc une réponse fréquentielle du type :

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-j\omega T_e} = \frac{1}{2} (e^{\frac{j\omega T_e}{2}} + e^{-\frac{j\omega T_e}{2}}) e^{-\frac{j\omega T_e}{2}} = \cos\left(\frac{\omega T_e}{2}\right) e^{-\frac{j\omega T_e}{2}}$$



*Réponse en amplitude*



*Réponse en phase*

## L' équation de récurrence

- ***Ex:  $y(n)=x(n)-x(n-1)$  dérivateur*** mais avec
- des résultats très moyens sauf pour les basses fréquence.

# Exemple

- Déterminer les coefficients d'un filtre RIF passe-bas avec les fréquences suivantes pour la bande passante et la bande d'arrêt 1kHz et 4.3 kHz. Utiliser une fenêtre de Hamming et considérer la fréquence d'échantillonnage de 10kHz.

## *Solution*

$$N \approx \frac{3.3}{\Delta f}$$

# Conclusion

- Il existe des méthodes de conception de filtre RIF simple à mettre en œuvre
- Phase linéaire, donc pas de dispersion
- Stabilité
- Cher en réalisation
- Le retard entre l'entrée et la sortie peut être relativement longue
- Implémentation possible sur tous les DSP

# **ANALYSE DES FILTRES RECURSIFS OU RII**

# Synthèse des filtres numériques

## RII

- Caractérisés par l'équation récurrente :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) + \sum_{k=1}^M a_k y(n-k)$$

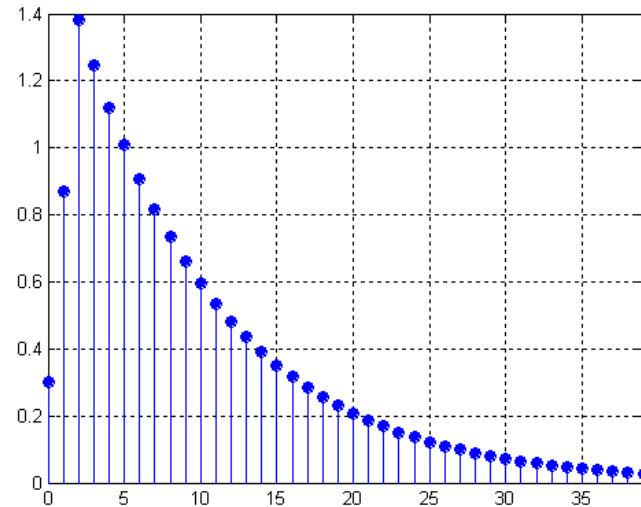
- La fonction de transfert est :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}$$

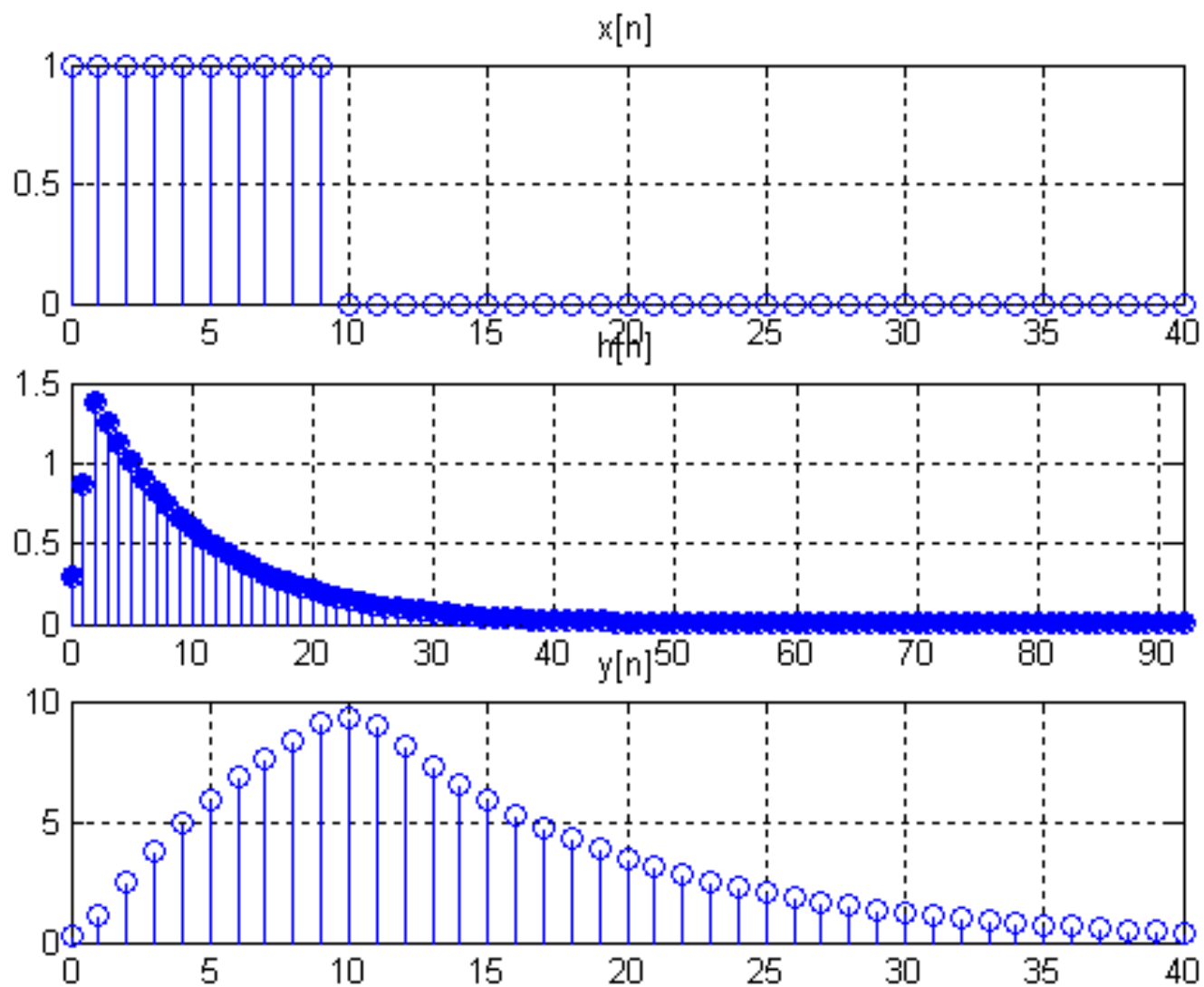


# Réponse impulsionnelle

$$H(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 - 1.8\cos(\pi/16)z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$



# Filtrage



# Synthèse des filtres numériques par transformation de $H(p)$ en $H(z)$

- Transposer la fonction de transfert  $H(p)$  de son homologue analogique du plan  $p$  dans le plan  $z$  par une règle reliant  $p$  à  $z$

## Transformation d'Euler ou équivalence de la dérivation

$$y(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow y_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$$

$$Y(p) = pX(p) \Rightarrow H(p) = p$$

$$Y(z) = \frac{1}{T_e} [X(z) - X(z)z^{-1}] = \frac{1-z^{-1}}{T_e} X(z)$$

$$p \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{T_e}$$

# Synthèse d'un filtre numérique passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre

- Soit la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \quad \tau = RC$$

- La réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

- La réponse indicielle :

$$s_{ind}(t) = \left[ 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right] u(t)$$

- En utilisant la transformation précédente :

$$H(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\tau}{T_e}\right) - \frac{\tau}{T_e} z^{-1}}$$

- L'équation aux différences est :

$$y_k = \frac{\frac{\tau}{T_e}}{1 + \frac{\tau}{T_e}} y_{k-1} + \frac{1}{1 + \frac{\tau}{T_e}} x_k$$

# Application

$$\tau = 1ms \ (R = 1k \ C = 1\mu)$$

$$T_e = 100\mu s$$

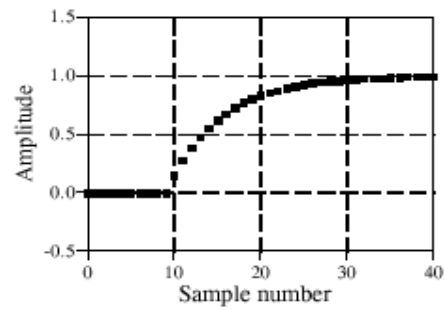
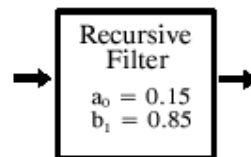
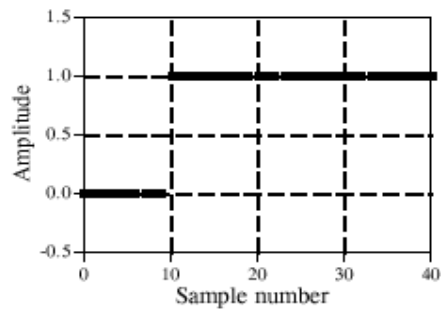
Équation ????

Réponse impulsionnelle  $x_1=1 \ x_k=0 \ k>1$

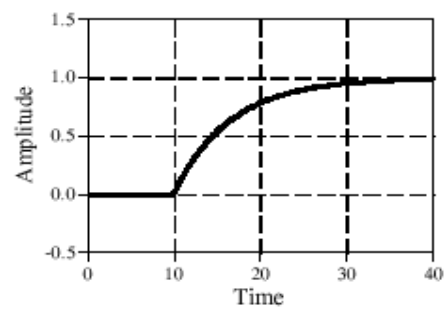
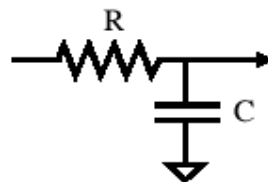
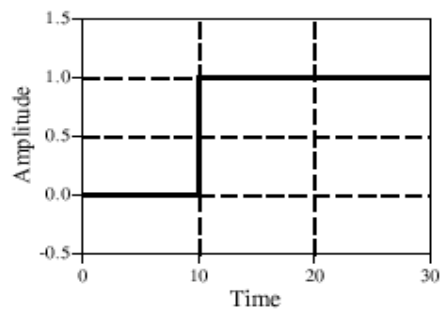
Réponse indicielle  $x_k=1 \ k \geq 1$

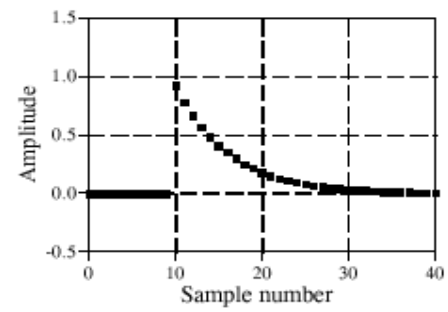
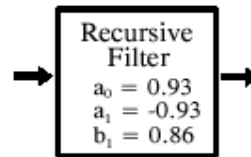
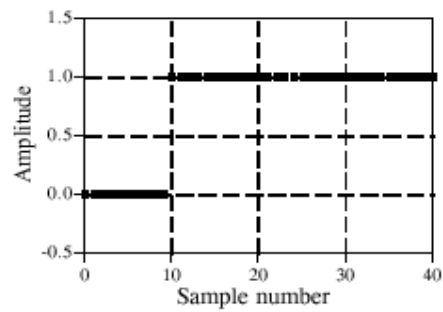
Conditions initiales  $y_0=1$

### Digital Filter

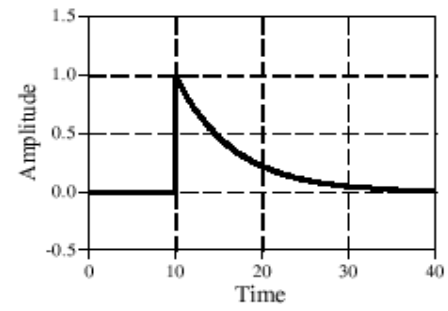
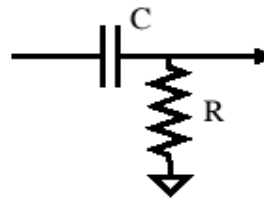
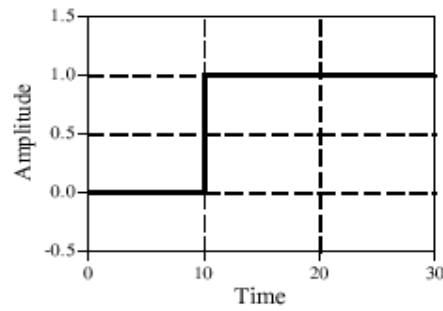


### Analog Filter





Analog Filter





# RII versus RIF

- La complexité d'un filtre RII est moindre que celle d'un filtre RIF du même ordre. Cette propriété peut être utile sur les plateformes limitées en puissance de calcul
- Généralement, les filtres RIF sont moins sensibles aux erreurs de quantification que les filtres RII. L'absence de récursivité empêche les erreurs cumulatives.
- Un filtre RIF est moins sélectif qu'un filtre RII du même ordre. C'est-à-dire que la transition entre la bande passante et la bande rejetée est moins rapide que dans le cas du filtre RII.
- Contrairement à un RII, un filtre RIF peut avoir une réponse impulsionnelle symétrique et introduire un retard sur le signal mais aucun déphasage.

# Le choix du filtre RIF/RII

- RIF peuvent avoir une phase linéaire : Applications transmission de données, audio, traitement d'images
- RII la phase est non-linéaire
- RIF toujours stable
- L'effet de la limitation du nombre de bits est moins sévère pour les RIF que pour les RII
- RIF nécessitent un nombre de coefficient supérieure au RII
- Les filtres analogiques peuvent être transformés facilement en RII

# Quand RII/RIF ?

- RII pour des filtres avec une bande de transition faible
- RII pour des gains importants
- RIF quand le nombre de coefficients est réduit :  
les DSP conçus pour RIF

# Les banc de filtres

# Traitement Multicadence

- Un système multicadence est caractérisé par le fait que des cadences de traitement différentes sont présentes simultanément en divers points de la chaîne de calcul
- Exemple: les opérations de sur et de sous-échantillonnage
- Avantage: gain en termes d'efficacité de calcul

# Applications du traitement du signal

## « multcadence »

- Filtrage bande étroite : Audio numérique
- Le codage en sous-bandes
- La conversion analogique/digitale ( $\Sigma$ - $\Delta$ )
- Transmultiplexeurs (OFDM)
- MPEG audio/vidéo
- .....

## **Problématique**

Les systèmes de communications mobiles (GSM) ou interactifs sur câbles sont des systèmes où divers utilisateurs sont autorisés à communiquer simultanément.

L'accès multiple est classiquement résolu en ayant recours au multiplexage temporel des signaux (GSM) où l'attribution de codes différents (*code division multiple acces*). Pour les réseaux CATV interactifs, il a récemment été proposé d'attribuer à chaque utilisateur une forme d'onde qui est en fait une fonction de base d'une transformation de Fourier discrète.

Cette technique a été baptisée **OFDMA** (*orthogonal frequency division multipleacces*).

## **Solution:**

- Structures en **bancs de filtres (systèmes sous-bandes)** , qui sont plus généraux que les systèmes à transformation orthogonale.

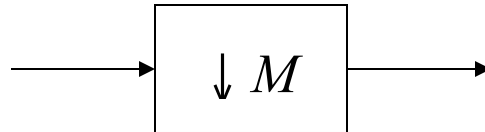
# Introduction

Un banc de filtre est un ensemble de filtres numériques travaillant en parallèle et découpant la bande de fréquence en  $K$  sous bandes.

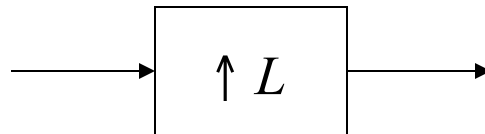
Le traitement du signal numérique traditionnel utilise des blocs comme: l'additionneur, multiplicateurs et des le retard.

Dans les systèmes banc de filtres, nous avons deux nouveaux bloc

Décimateur



Expandeur





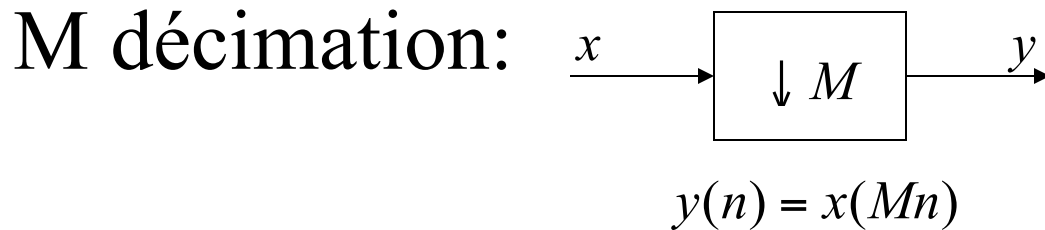
## **Sur-échantillonnage**

- Consiste à effectuer une interpolation sur une suite  $x(n)$  en calculant  $M-1$  valeurs intermédiaires entre deux points consécutifs

## **Sous-échantillonnage**

- Consiste à calculer, à partir d'une suite échantillonnée à  $f_e$ , les valeurs de la même suite qui aurait été échantillonnée à  $f_e/M$

# M Décimateur



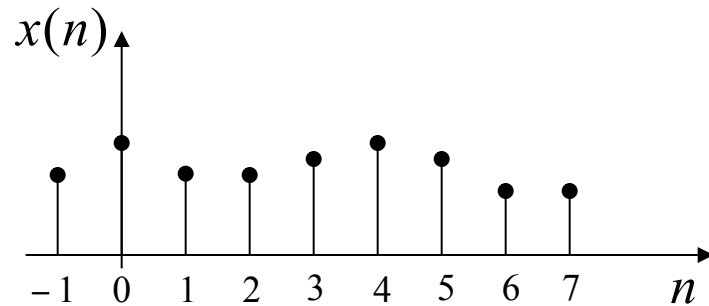
$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} W^k), \quad W = e^{-j2\pi/M}$$

$$z = e^{j\omega} \quad Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - 2\pi k)/M})$$

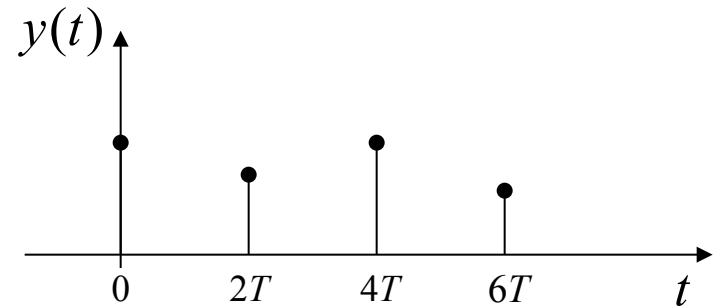
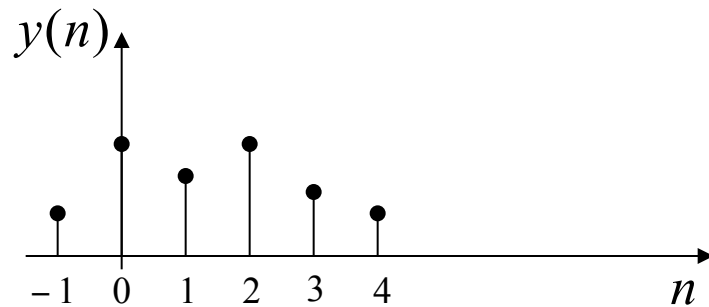
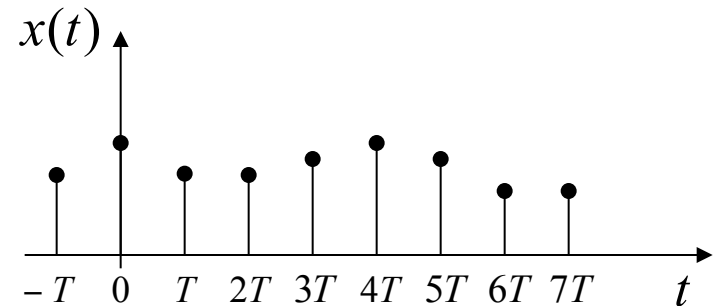
Dans l'intervalle  $(-1/2, 1/2)$ ,  $Y(f)$  est la somme algébrique de M contributions décalées de  $1/M$

# Échelle temps

Séquence

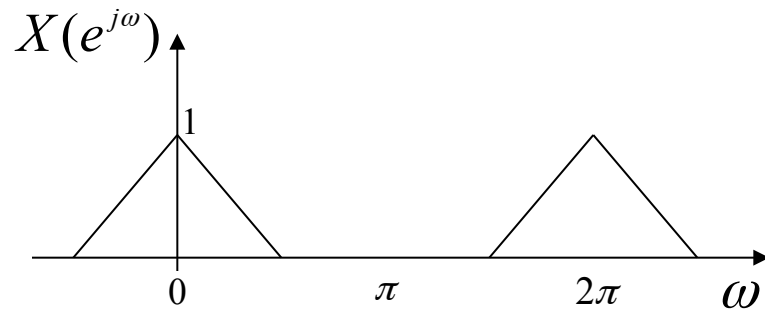


Temps physique

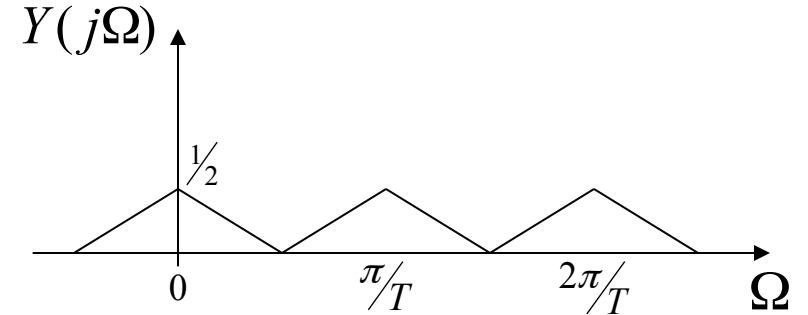
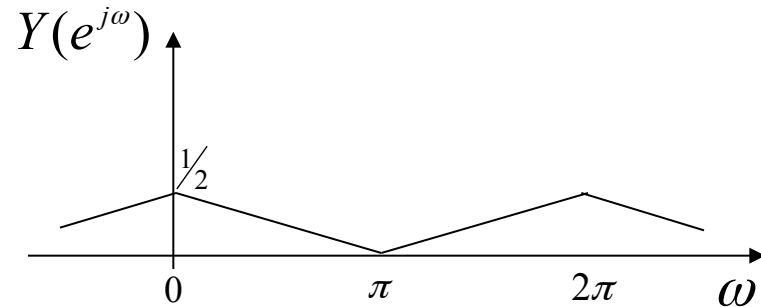
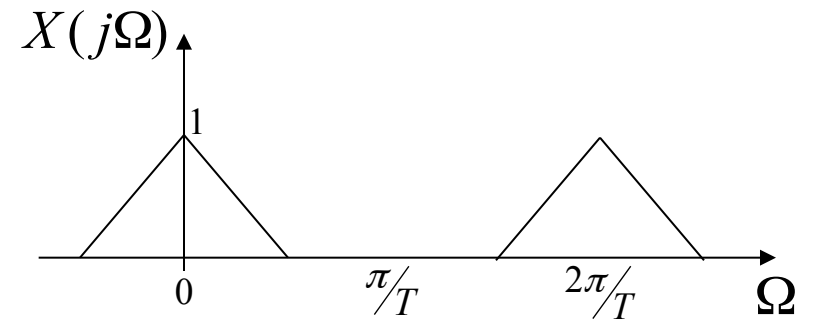


# Échelle fréquence

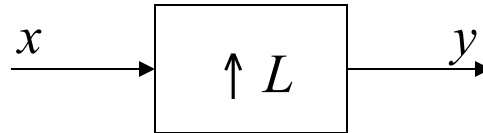
Fréquence physique



Fréquence normalisée



# L Expandeur



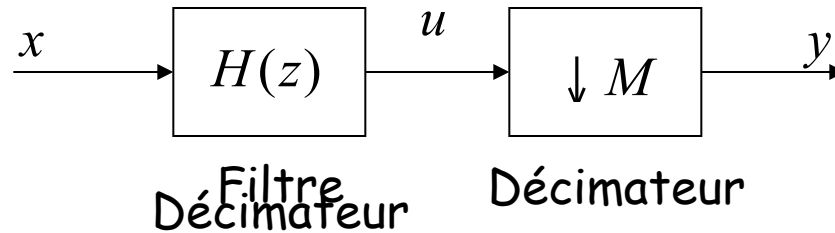
L-expandeur:

$$y(n) = \begin{cases} x(n/L), & n \text{ est un multiple de } L \\ 0, & \text{en rest} \end{cases}$$

$$Y(z) = X(z^L) \quad z = e^{j\omega} \quad Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$$

On retrouve le spectre de  $x(n)$  répliqué  $L$  fois

# Filtre Décimateur



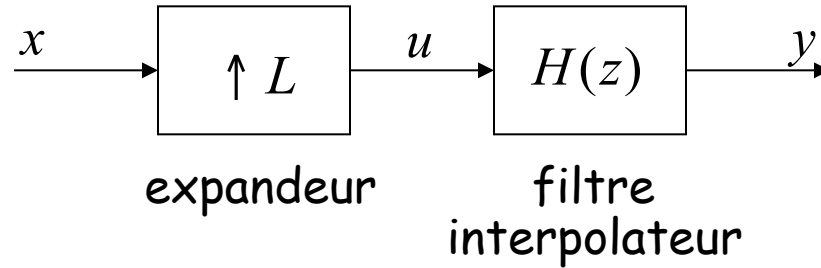
$$U(z) = X(z)H(z)$$

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} U(z^{1/M} W^k) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} W^k) H(z^{1/M} W^k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= u(Mn) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(Mn-k) \end{aligned}$$

# Filtre Interpolateur



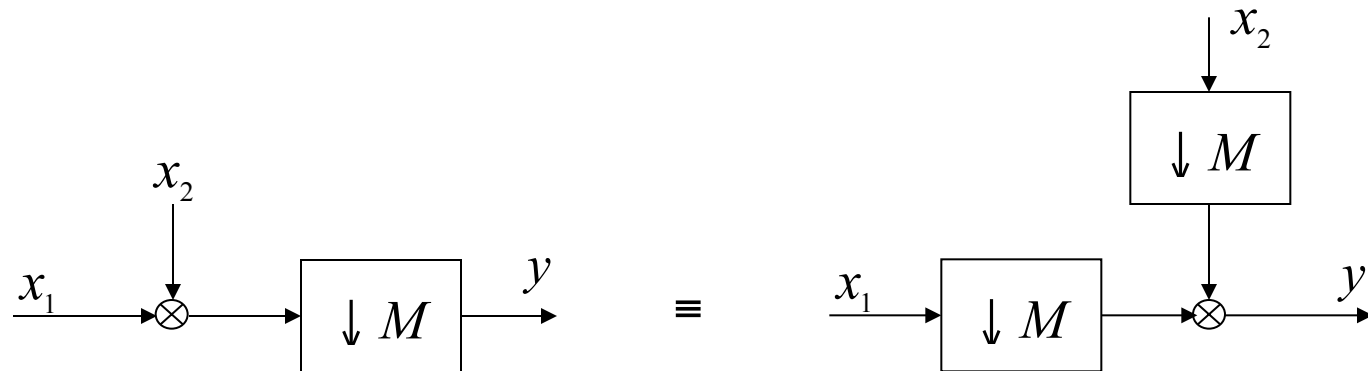
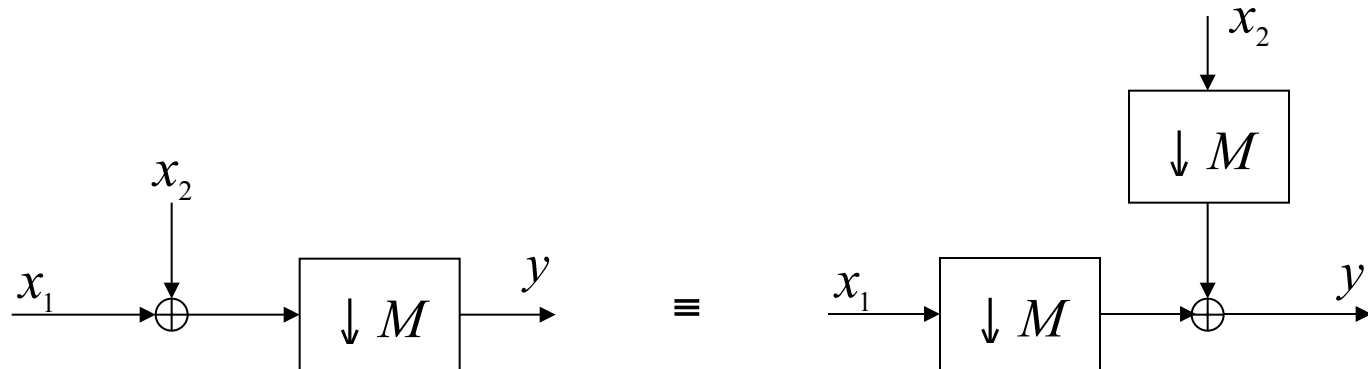
$$U(z) = X(z^L)$$

$$u(n) = \begin{cases} x(n/L), & n \text{ multiple de } L \\ 0, & \text{en rest} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= U(z)H(z) \\ &= X(z^L)H(z) \end{aligned}$$

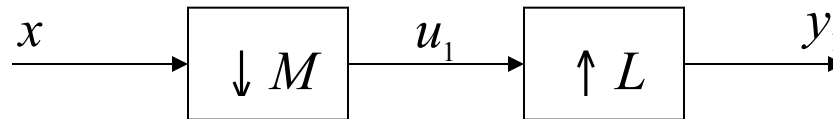
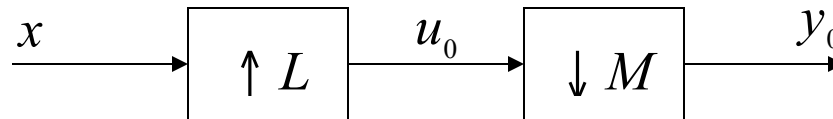
$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)h(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-kL) \end{aligned}$$

# Connexion des éléments d'un schéma bloque





# Décimateur-Expandeur en cascades



$y_0=y_1$  si et seulement si  $(M,L)$  premières

# Simplification

## Identité 1:



## Identité 2:



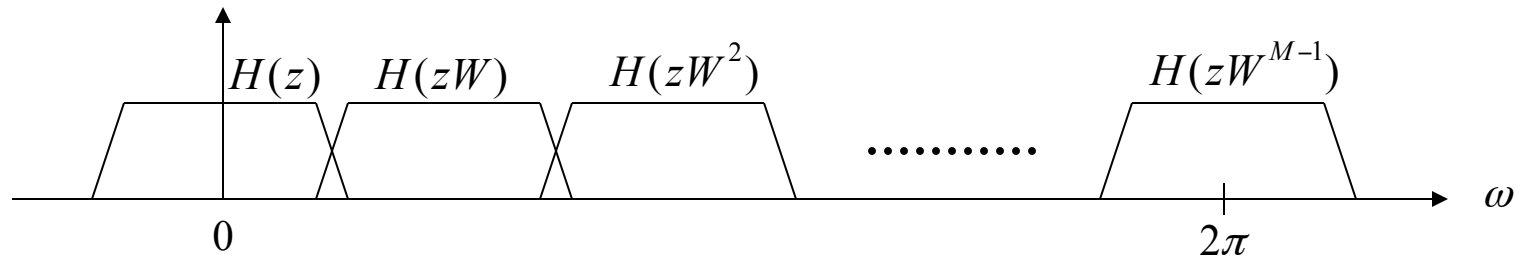
# Filtres Spéciaux

$$E_0(z) = c$$

Filtre banc d'ordre M:

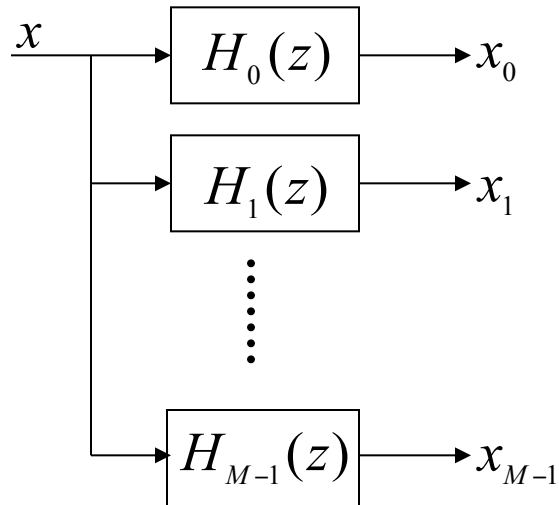
$$\sum_{k=0}^{M-1} H(zW^k) = Mc$$

Représentation fréquentielle:

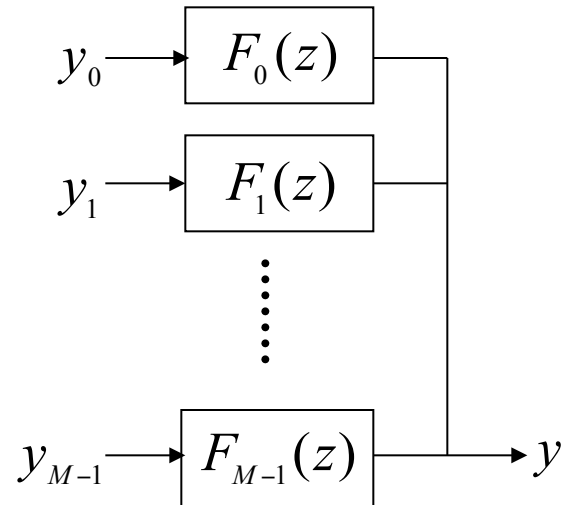


# Banc de Filtres Numériques

Analyse

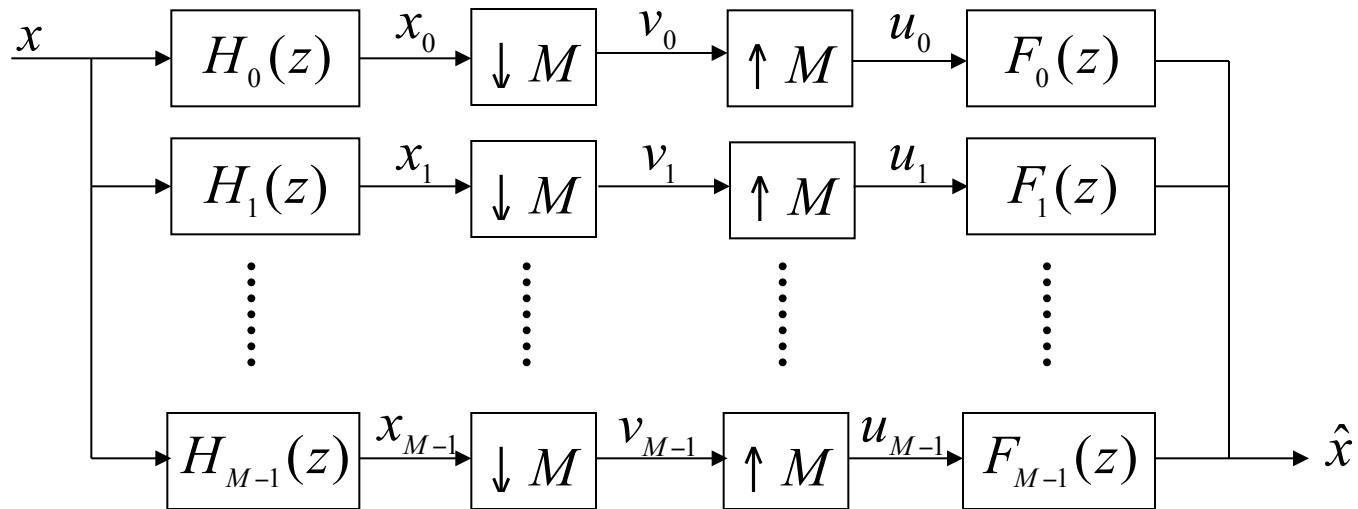


Synthèse



# Conclusions:

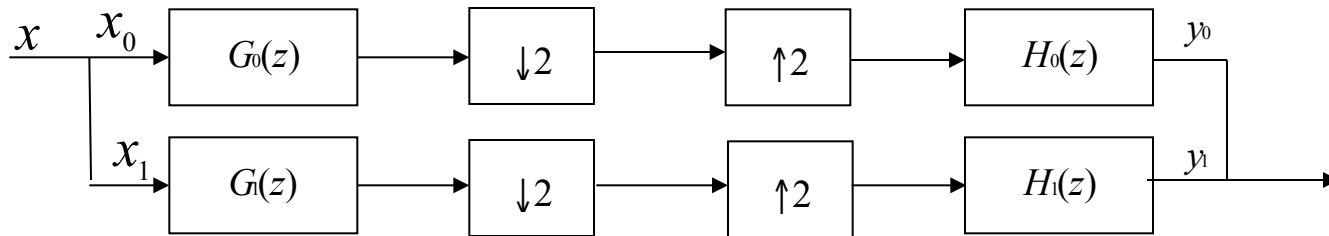
M-banc de filtres:



La reconstruction exacte est:

$$\hat{X}(z) = cz^{-n_0} X(z), \quad \hat{x}(n) = cx(n - n_0)$$

$M=2$  :



$$Y_0(z) = H_0(z) [G_0(z)X(z) + G_0(-z)X(-z)]/2$$

$$Y_1(z) = H_1(z) [G_1(z)X(z) + G_1(-z)X(-z)]/2$$

La reconstruction parfaite est assurée lorsque

$$\hat{X}(z) = z^{-r} X(z)$$

$$G_0(z)H_0(z)+G_1(z)H_1(z)=2z^{-r}$$

$$G_0(-z)H_0(z)+G_1(-z)H_1(z)=0$$

- QMF:  $G_1(z)=G_0(-z)$
- CQF:  $G_1(z)=(-z)^{-N} G_0(-z^{-1})$

# Transmission Numérique



# Types de transmission

- **Transmission en bande de base:** les signaux sont transmis tels qu'ils sortent de la source
- **Transmission par modulation:** transposer le signal en autre contenant la même information, mais avec une modification en fréquence du signal
  - Permet le multiplexage fréquentiel
  - Adaptation aux condition d'un milieu de transmission

# Quantité d'information

- La quantité d'information  $I$  contenue dans un caractère est :

$$I = -\log_2 p(x_i)$$

- Quantité d'information moyenne d'une source Entropie  
Soit une source ayant émis un message de  $m$  caractère issus d'un alphabet de  $n$  caractère alors

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \log_2 p(x_i)$$

# Message numérique en bande de base

- Le message numérique est une suite  $\{d_k\}$  de v.a. à valeurs dans  $\{0,1\}$
- Le modulateur associe de façon bijective à chacun de  $2^k$  message possible un signal à temps continue  $x(t)$
- **Exemple:** le signal numérique est engendré à partir d'une impulsion  $h(t)$  décalée et modulée par  $d_k$

$$x(t) = \sum_{k=1}^K d_k h(t - kT_b)$$

- Où  $T_b$  est l'intervalle de temps entre l'émission de 2 bits

$$D_b = \frac{1}{T_b}$$

# Transmission binaire

- On considère un alphabet fini à M symboles

$$M=2^m$$

- On choisit un codage qui associe à toute suite de m bits du message numérique un symbole  $a_k$  de l'alphabet  $A$

- Le modulateur fournit le signal numérique:*

$$x(t)=\sum_k a_k h(t-kT) \quad \text{où } T=mT_b$$

- Donc

$$R=\frac{1}{T}=\frac{D_b}{\log_2(M)} \quad \text{baud}$$

## Codage de Gray

100	-7
101	-5
111	-3
110	-1
010	1
011	3
001	5
000	7

# Modulation sur fréquence porteuse

- On associe à un symbole dans l'intervalle de temps  $(kT, (k+1)T)$  le signal:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Phi_k)$$

L'enveloppe complexe de  $x(t)$  a pour expression

$$x_b(t) = A \sum_k a_k \text{rect}_T(t - kT) \quad a_k = \exp(j\varphi_k)$$

# Introduction

- Lors de transmission sont émis, soit des signaux analogique numérisés soit des données purement et initialement numérique
- La suite des valeurs binaires obtenues est transformée en une série d'impulsion destinée à être transmises c'est la transmission PCM
- En modulation numérique différentielle dite DPCM sont transmis des différences en amplitude des échantillons successifs

# Modulation PCM

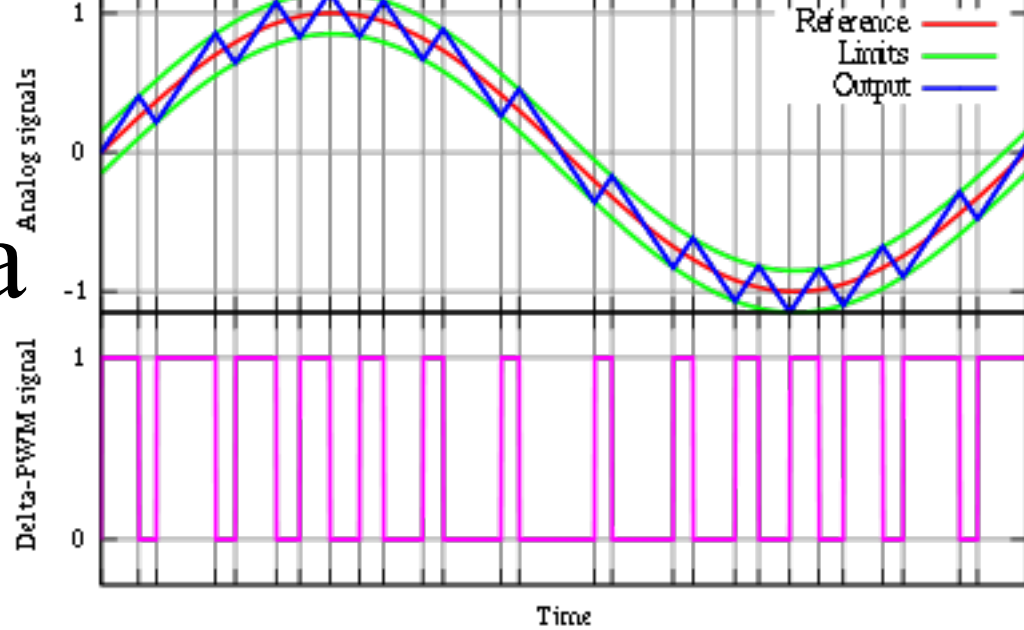
- Supposons que le signal analogique à transmettre ait quantifié en amplitude sur  $q$  niveaux représentés par des nombres binaires de  $n$  bits :  $q=2^n$  Donc, il faut transmettre  $n$  impulsions binaires pour chaque échantillons soit  $nF_e$  impulsion par seconde.
- Le débit de moments est donc :

$$M=nFe \text{ (Bd)}$$

- La bande passante nécessaire à la transmission PCM d'un signal analogique dont le spectre est borné par par valeur supérieure à  $f_{\max}=F_e/2$  est :

$$B=\frac{M}{2}=\frac{n}{2}F_e=nf_{\max}$$

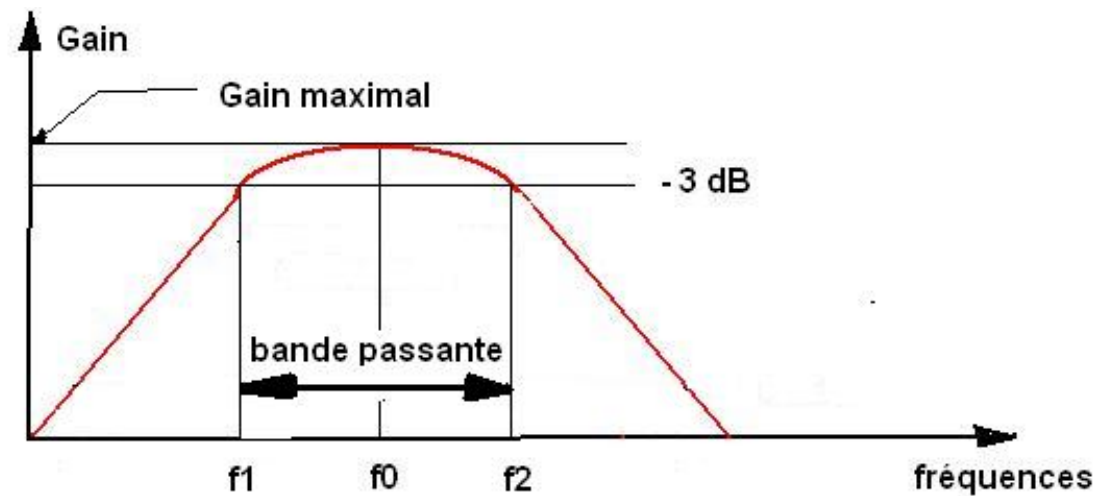
# Modulation delta



## Principe

- C'est fondamentalement une quantification à un seul bit. Cette variable est égale à la différence entre l'amplitude  $x_e[n]$  de l'échantillon informatif et une amplitude  $x_\Sigma(n)$  reconstitué par extrapolation successives d'ordre zéro.
- Pour cette reconstitution on utilise un pas de quantification  $\Delta$
- $x_\Sigma$  est calculé à la fois par l'émetteur pour la modulation et par le récepteur.





## **Bande passante**

- Le débit de moments est donc  $M=Fe$  (Bd).
- Les erreurs de traînage c'est à dire la possibilité que l'écart entre  $x(t)$  et  $x_{\Sigma}(t)$  ne soit supérieure à  $\Delta$  qui impose :

$$\frac{\Delta}{T_e} \geq \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|_{\max} \quad \xrightarrow{\text{😊}} \quad f_e \geq \frac{1}{\Delta} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|_{\max}$$

**Condition plus exigeante que le théorème de Shannon**