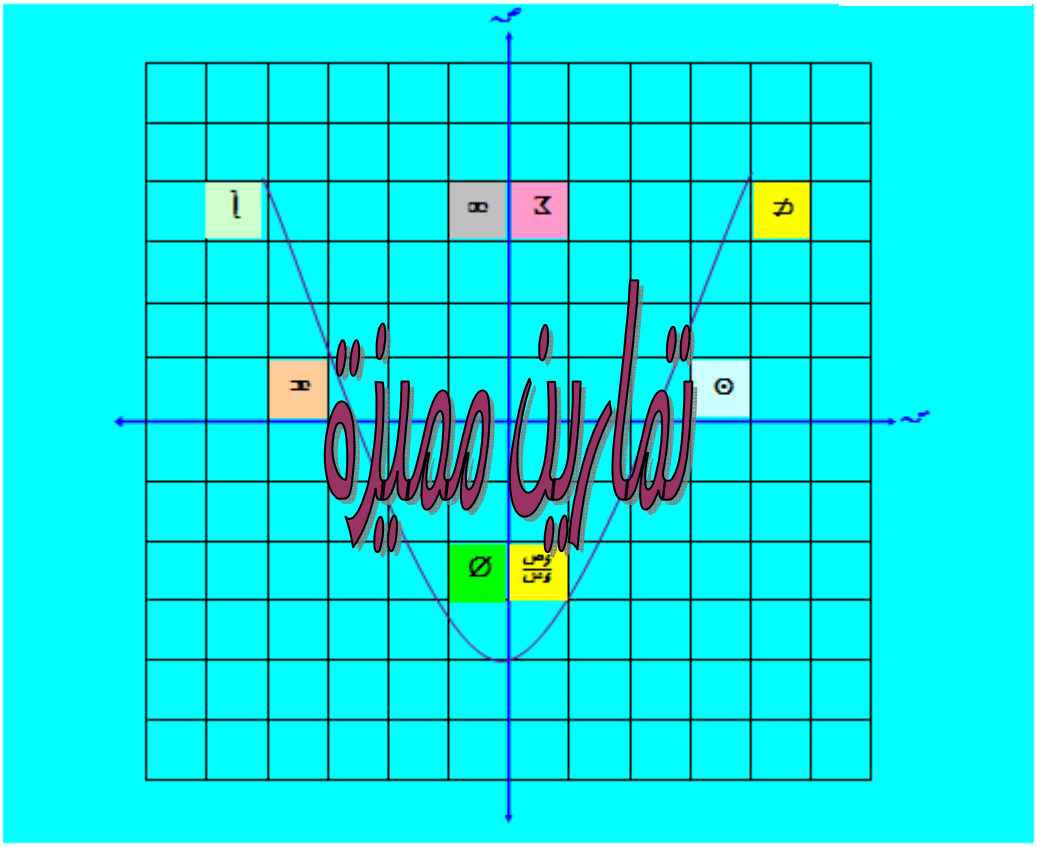
المميز

في



الإستاتيكا

أحمد الشتوى

محصلة قوتين

قوتان مقدارهما ٥ ، ١٠ ث كجم تؤثران فى نقطة مادية قياس الزاوية بينهما ١٢٠°
أوجد مقدار و إتجاه محصلتهما

الحل

∵ $ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2$ حتا ى

∴ $ح^2 = (٥)^2 + (١٠)^2 + 2 \times ٥ \times ١٠$ حتا ١٢٠°

∴ $ح^2 = ٢٥ + ١٠٠ + ١٠٠ \times -\frac{1}{2} = ٧٥$

∴ $ح = \sqrt{٧٥} = ٥\sqrt{٣}$ ث كجم

، $ظا هـ = \frac{ق_2 \text{ حا ى}}{ق_1 + ق_2 \text{ حتا ى}} = \frac{١٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{2}}{٥ + ١٠ \times -\frac{1}{2}} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٠}$

∴ ظتا هـ = صفر ∴ هـ = ٩٠°

∴ خط عمل المحصلة عمودى على خط عمل القوة ٥ ث كجم

قوتان مقدارهما ق ، ١٠ ث كجم تؤثران فى نقطة مادية قياس الزاوية بينهما ١٢٠°
و مقدار محصلتهما $٥\sqrt{٣}$ ث كجم أوجد ق

الحل

∵ $ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2$ حتا ى

∴ $(٥\sqrt{٣})^2 = ق^2 + (١٠)^2 + 2 \times ق \times ١٠$ حتا ١٢٠°

∴ $٧٥ = ق^2 + ١٠٠ - ١٠ ق$

∴ $ق^2 - ١٠ ق + ٢٥ = ٠$

∴ $(ق - ٥)^2 = ٠$

∴ ق = ٥ ث كجم

قوتان مقدارهما ق ، ١٠ ث كجم تؤثران فى نقطة مادية قياس الزاوية بينهما ١٢٠°
فإذا كان خط عمل محصلتهما عمودى على خط عمل القوة ق أوجد ق

الحل

∵ خط عمل المحصلة عمودى على خط عمل القوة

∴ $ق_1 + ق_2$ حتا ى = ٠

∴ $ق + ١٠ \times -\frac{1}{2} = ٠$

∴ ق = ٥ ث كجم

قوتان مقدارهما ٥ ، ق ث كجم تؤثران فى نقطة مادية قياس الزاوية بينهما ١٢٠°
فإذا كان قياس الزاوية بين خط عمل محصلتهما و خط عمل القوة ق هو ٣٠° أوجد ق

الحل

∵ قياس الزاوية بين خط عمل محصلتهما و خط عمل القوة ق هو ٣٠°

∴ ظا ٣٠° = $\frac{٥ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{ق + ٥ \times -\frac{١}{٢}}$ ∴ $\frac{٥ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{ق + ٥ \times -\frac{١}{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ $\frac{١٥}{٢}$ = ق − $\frac{٥}{٢}$ ∴ ق = ١٠ ث كجم

قوتان مقدارهما ق ، ٢ق ث كجم تؤثران فى نقطة مادية قياس الزاوية بينهما ١٢٠°
فإذا كانت محصلتهما ٥ $\sqrt{٣}$ ث كجم أوجد مقدار القوتين

الحل

∵ $ح^٢$ = $ق_١^٢$ + $ق_٢^٢$ + ٢ $ق_١$ $ق_٢$ حتا ى

∴ $(٥\sqrt{٣})^٢$ = $ق^٢$ + ٤ $ق^٢$ + ٢ × ق × ٢ق × $-\frac{١}{٢}$

∴ ٧٥ = ٣ $ق^٢$ ∴ $ق^٢$ = ٢٥

∴ ق = ٥ ∴ مقدار القوتان هما ٥ ، ١٠ ث كجم

قوتان مقدارهما $ق_١$ ، $ق_٢$ ث كجم تؤثران فى نقطة مادية قياس الزاوية بينهما ١٢٠°
فإذا كان خط عمل محصلتهما عمودى على خط عمل القوة $ق_١$ أوجد $ق_١$ ، $ق_٢$

الحل

∵ $ح^٢$ = $ق_١^٢$ + $ق_٢^٢$ + ٢ $ق_١$ $ق_٢$ حتا ى

∴ $(٥\sqrt{٣})^٢$ = $ق_١^٢$ + $ق_٢^٢$ + ٢ × $ق_١$ × $ق_٢$ × $-\frac{١}{٢}$

∴ ٧٥ = $ق_١^٢$ + $ق_٢^٢$ − $ق_١$ × $ق_٢$ (١)

∵ كان خط عمل محصلتهما عمودى على خط عمل القوة $ق_١$

∴ $ق_١$ + $ق_٢$ حتا ى = ٠ ∴ $ق_١$ − $\frac{١}{٢}$ $ق_٢$ = ٠

∴ $ق_٢$ = ٢ $ق_١$ بالتعويض فى (١)

∴ ٧٥ = $ق_١^٢$ + ٤ $ق_١^٢$ − ٢ $ق_١^٢$

∴ ٧٥ = ٣ $ق_١^٢$ ∴ $ق_١^٢$ = ٢٥

∴ $ق_١$ = ٥ ث كجم ، $ق_٢$ = ١٠ ث كجم

جسيم متزن بتأثير ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٥ ، ١٠ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ث كجم على الترتيب
أوجد قياس الزاوية بين كل قوتين من هذه القوى

الحل

∵ $ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ حتا ى

∴ $(٥\sqrt{٣})^٢ = (٥)^٢ + (١٠)^٢ + ٢ \times ٥ \times ١٠$ حتا ى

∴ ٧٥ = ٢٥ + ١٠٠ + ١٠٠ حتا ى

∴ حتا ى = $-\frac{١}{٢}$ ∴ ى = ١٢٠°

∴ قياس الزاوية بين القوتين ٥ ، ١٠ ث كجم هو ١٢٠°

بالمثل :

$(٥)^٢ = (٥\sqrt{٣})^٢ + (١٠)^٢ + ٢ \times ٥\sqrt{٣} \times ١٠$ حتا ك

∴ حتا ك = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ ك = ١٥٠°

∴ قياس الزاوية بين القوتين $٥\sqrt{٣}$ ، ١٠ ث كجم هو ١٥٠°

∴ قياس الزاوية بين القوتين ٥ ، $٥\sqrt{٣}$ ث كجم = ٣٦٠° − (١٢٠° + ١٥٠°) = ٩٠°

قوتان مقدارهما $ق_١$ ، $ق_٢$ ث كجم تؤثران فى نقطة مادية قياس الزاوية بينهما هـ
و مقدار محصلتهما ٢ $ق_١$ ، و إذا تغير قياس الزاوية بينهما و أصبح (١٨٠° − هـ)
فإن مقدار محصلتهما ينقص إلى النصف أوجد $ق_١ : ق_٢$

الحل

∵ $ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ حتا هـ

∴ $٤ ق_١^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ حتا هـ

∴ $٣ ق_١^٢ = ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ حتا هـ (١)

، $ق_١^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ (١٨٠° − هـ)

∴ $٠ = ق_٢^٢ - ٢ ق_١ ق_٢$ حتا هـ (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج :

$٣ ق_١^٢ = ٢ ق_٢^٢$

∴ $\sqrt{٣}\, ق_١ = \sqrt{٢}\, ق_٢$

∴ $ق_١ : ق_٢ = \sqrt{٢} : \sqrt{٣}$

إتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية و غير متوازية

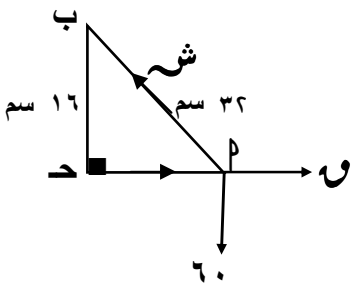
جسم وزنه ٦٠ ث جم معلق من أحد طرفى خيط خفيف أ ، و مثبت طرفه الآخر ب من نقطة ثابتة حيث أ ب = ٣٢ سم فإذا أتزن الجسم و هو على بعد ١٦ سم أسفل الخيط الأفقى المار بنقطة ب بقوة أفقية أوجد مقدار هذه القوة ، و كذا الشد فى الخيط

الحل

من هندسة الشكل

ق (∠ ب أ حـ) = ٣٠°

بتطبيق قاعدة لامى :



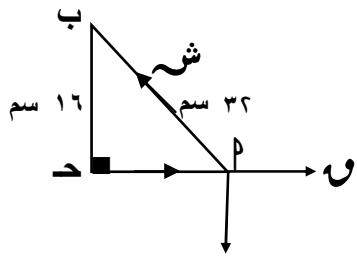
$\frac{٦٠}{\text{حا } ١٥٠} = \frac{\text{ق}}{\text{حا } ١٢٠} = \frac{\text{ش}}{\text{حا } ٩٠}$

∴ ق = $\frac{٦٠ \text{ حا } ١٢٠}{\text{حا } ١٥٠}$ = ٦٠ $\sqrt{٣}$ ث جم

، ش = $\frac{٦٠ \text{ حا } ٦٠}{\text{حا } ١٢٠}$ = ١٢٠ ث جم

حل آخر :

من هندسة الشكل



أ حـ = ١٦ $\sqrt{٣}$ سم ، Δ أ ب حـ هو مثلث القوى

$\frac{\text{ق}}{١٦\sqrt{٣}} = \frac{٦٠}{١٦} = \frac{\text{ش}}{٣٢}$

∴ ق = ٦٠ $\sqrt{٣}$ ث جم ، ش = ١٢٠ ث جم ٦٠

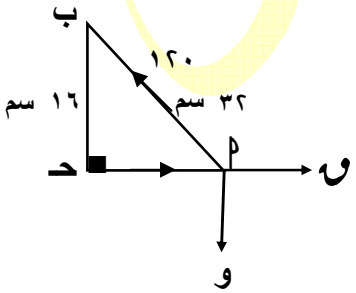
جسم وزنه و ث جم معلق من أحد طرفى خيط خفيف أ ، و مثبت طرفه الآخر ب من نقطة ثابتة حيث أ ب = ٣٢ سم فإذا أتزن الجسم و هو على بعد ١٦ سم أسفل الخيط الأفقى المار بنقطة ب بقوة أفقية فإذا كان الشد فى الخيط ١٢٠ ث جم أوجد مقدار هذه القوة ، و وزن الجسم

الحل

من هندسة الشكل

ق (∠ ب أ حـ) = ٣٠°

بتطبيق قاعدة لامى :



$\frac{\text{و}}{\text{حا } ١٥٠} = \frac{\text{ق}}{\text{حا } ١٢٠} = \frac{١٢٠}{\text{حا } ٩٠}$

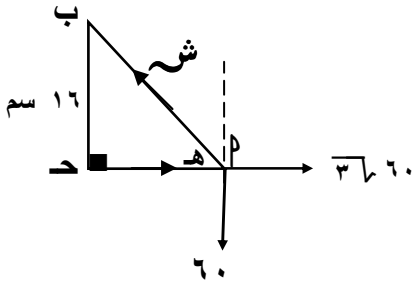
∴ ق = $\frac{١٢٠ \text{ حا } ١٢٠}{\text{حا } ٩٠}$ = ٦٠ $\sqrt{٣}$ ث جم

، و = $\frac{١٢٠ \text{ حا } ١٥٠}{\text{حا } ٩٠}$ = ٦٠ ث جم

جسم وزنه و ث جم معلق من أحد طرفى خيط خفيف أ ، و مثبت طرفه الآخر ب من نقطة ثابتة حيث فإذا أتزن الجسم و هو على بعد ١٦ سم أسفل الخيط الأفقى المار بنقطة ب بقوة أفقية مقدارها ٦٠ √٣ ث جم أوجد طول الخيط ، و الشد فى الخيط

الحل

بفرض أن : ق (∠ ب أ حـ) = هـ° ، بتطبيق قاعدة لامى :



$\frac{٦٠}{حا(١٨٠° - هـ)} = \frac{٦٠\sqrt{٣}}{حا(٩٠° + هـ)} = \frac{ش}{حا ٩٠}$

∴ $\frac{٦٠}{حا هـ} = \frac{٦٠\sqrt{٣}}{حتا هـ} = \frac{ش}{حا ٩٠}$

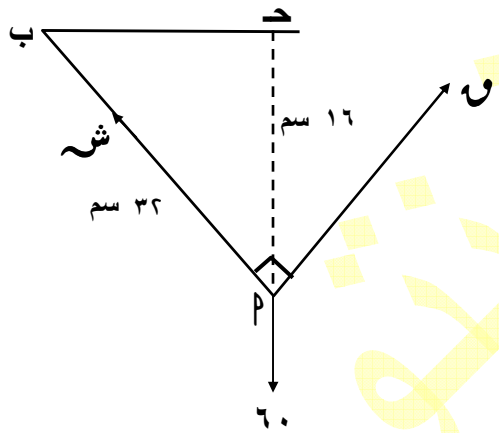
∴ طا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ هـ = ٣٠°

من Δ أ ب حـ ∴ أ ب " طول الخيط " = ٣٢ سم

، ش = $\frac{٦٠ حا ٩٠}{حا ١٥٠}$ = ١٢٠ ث جم

جسم وزنه ٦٠ ث جم معلق من أحد طرفى خيط خفيف أ ، و مثبت طرفه الآخر ب من نقطة ثابتة حيث أ ب = ٣٢ سم فإذا أتزن الجسم و هو على بعد ١٦ سم أسفل الخيط الأفقى المار بنقطة ب بقوة عمودية على الخيط أوجد مقدار هذه القوة ، و كذا الشد فى الخيط

الحل



من هندسة الشكل ق (∠ ب أ حـ) = ٦٠°

بتطبيق قاعدة لامى :

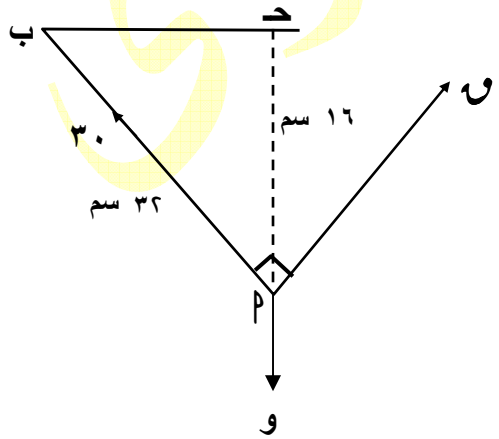
$\frac{٦٠}{حا ٩٠} = \frac{ق}{حا ١٢٠} = \frac{ش}{حا ١٥٠}$

∴ ق = $\frac{٦٠ حا ١٢٠}{حا ٩٠}$ = ٣٠ √٣ ث جم

، ش = $\frac{٦٠ حا ١٥٠}{حا ٩٠}$ = ٣٠ ث جم

جسم وزنه و ث جم معلق من أحد طرفى خيط خفيف أ ، و مثبت طرفه الآخر ب من نقطة ثابتة حيث أ ب = ٣٢ سم فإذا أتزن الجسم و هو على بعد ١٦ سم أسفل الخيط الأفقى المار بنقطة ب بقوة عمودية على الخيط فإذا كان الشد فى الخيط ٣٠ ث جم أوجد مقدار هذه القوة ، و وزن الجسم

الحل



من هندسة الشكل ق (∠ ب أ حـ) = ٦٠°

بتطبيق قاعدة لامى :

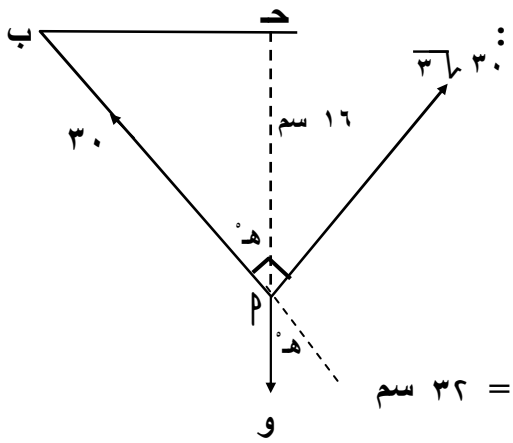
$\frac{و}{حا ٩٠} = \frac{ق}{حا ١٢٠} = \frac{٣٠}{حا ١٥٠}$

∴ ق = $\frac{٣٠ حا ١٢٠}{حا ١٥٠}$ = ٣٠ √٣ ث جم

، و = $\frac{٣٠ حا ٩٠}{حا ١٥٠}$ = ٦٠ ث جم

جسم وزنه و ث جم معلق من أحد طرفى خيط خفيف أ ، و مثبت طرفه الآخر ب من نقطة ثابتة فإذا أتزن الجسم و هو على بعد ١٦ سم أسفل الخيط الأفقى المار بنقطة ب بقوة عمودية على الخيط مقدارها ٣٠ $\sqrt{٣}$ ث جم أوجد طول الخيط ، و كذا وزن الجسم

الحل



بفرض أن : ق (∠ ب أ حـ) = هـ° ، بتطبيق قاعدة لامى :

$$\frac{٣٠\sqrt{٣}}{\text{حا}(١٨٠° - \text{هـ})} = \frac{٣٠}{\text{حا}(٩٠° + \text{هـ})} = \frac{\text{و}}{\text{حا } ٩٠}$$

$$\therefore \frac{٣٠\sqrt{٣}}{\text{حا هـ}} = \frac{٣٠}{\text{حتا هـ}} = \frac{\text{ش}}{\text{حا } ٩٠}$$

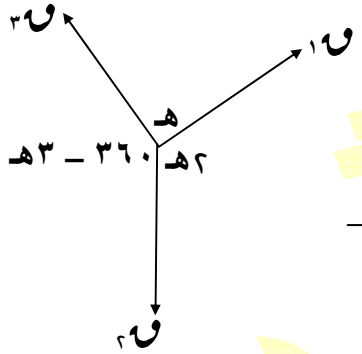
$\therefore$ ظا هـ = $\sqrt{٣}$ $\therefore$ هـ = ٦٠°

من Δ أ ب حـ $\therefore$ أ ب " طول الخيط " = ٣٢ سم

، و = $\frac{٣٠ \text{ حا } ٩٠}{\text{حا } ١٥٠}$ = ٦٠ ث جم

ثلاث قوى $\text{ق}_١$ ، $\text{ق}_٢$ ، $\text{ق}_٣$ تؤثر فى نقطة واحدة و متزنة ، فإذا كان قياس الزاوية بين $\text{ق}_١$ ، $\text{ق}_٢$ ضعف قياس الزاوية بين $\text{ق}_١$ ، $\text{ق}_٣$ فإثبت أن : $(\text{ق}_٣)^٢ = (\text{ق}_٢) \times (\text{ق}_٢ - \text{ق}_١)$

الحل



من قاعدة لامى : $\frac{\text{ق}_١}{\text{حا}(٣٦٠ - ٣\text{هـ})} = \frac{\text{ق}_٢}{\text{حا هـ}} = \frac{\text{ق}_٣}{\text{حا } ٢\text{ هـ}}$

$$\therefore \frac{\text{ق}_١}{-\text{حا } ٣\text{ هـ}} = \frac{\text{ق}_٢}{\text{حا هـ}} = \frac{\text{ق}_٣}{\text{حا } ٢\text{ هـ}}$$

من خواص التناسب يكون : $\frac{\text{ق}_٣}{\text{حا } ٢\text{هـ}} = \frac{\text{ق}_٢}{\text{حا هـ}} = \frac{\text{ق}_٢ - \text{ق}_١}{\text{حا } ٣\text{هـ} + \text{حا هـ}}$

$$\frac{(\text{ق}_٣)^٢}{\text{حا}^٢ \text{ ٢ هـ}} = \frac{\text{ق}_٢ (\text{ق}_٢ - \text{ق}_١)}{\text{حا هـ} (\text{حا } ٣\text{هـ} + \text{حا هـ})} \quad (١)$$

، ∵ حا ٣ هـ = حا (هـ + ٢هـ) = حا هـ حتا ٢هـ + حتا هـ حا ٢هـ = حا هـ حتا ٢هـ + ٢ حا هـ حتا^{٢}هـ

∴ حا ٣ هـ + حا هـ = حا هـ حتا ٢هـ + ٢ حا هـ حتا^{٢}هـ + حا هـ = حا هـ (حتا ٢هـ + ٢ حتا^{٢}هـ + ١)

= حا هـ (٢ حتا^{٢}هـ + ٢ حتا^{٢}هـ − ١ + ١) = حا هـ × ٤ حتا^{٢}هـ

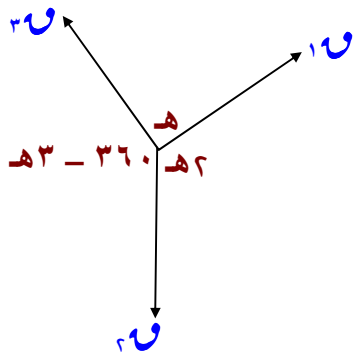
= ٢ حا هـ حتا هـ × ٢ حتا هـ = حا ٢ هـ × ٢ حتا هـ

∴ حا هـ (حا ٣ هـ + حا هـ) = حا هـ × حا ٢ هـ × ٢ حتا هـ = حا^٢ ٢ هـ بالتعويض فى (١)

$$\therefore \frac{(\text{ق}_٣)^٢}{\text{حا}^٢ \text{ ٢ هـ}} = \frac{\text{ق}_٢ (\text{ق}_٢ - \text{ق}_١)}{\text{حا}^٢ \text{ ٢ هـ}} \quad \therefore (\text{ق}_٣)^٢ = (\text{ق}_٢) \times (\text{ق}_٢ - \text{ق}_١)$$

حل آخر

∵ القوى تؤثر فى نقطة واحدة و متزنة ∴ بتطبيق قاعدة لامى



$\frac{ق_2}{حا هـ} = \frac{ق_3}{حا 2هـ} = \frac{ق_1}{حا(360 - 3هـ)} = م$

∴ $\frac{ق_3}{حا 2هـ} = \frac{ق_2}{حا 2هـ} = \frac{ق_1}{-حا 3هـ} = م$

∴ $ق_1 = -م حا 3هـ = -م حا(هـ + 2هـ)$

$= -م[حا هـ حتا 2هـ + حتا هـ حا 2هـ]$

$= -م[حا هـ(1 - 2حا^2 هـ) + حتا هـ × 2 حا هـ حتا هـ)]$

$= -م[حا هـ - 2حا^3 هـ + 2 حا هـ حتا^2 هـ]$

$= -م[حا هـ - 2حا^3 هـ + 2 حا هـ(1 - حا^2 هـ)]$

$= -م[حا هـ - 2حا^3 هـ + 2 حا هـ - 2حا^3 هـ] = -م[3 حا هـ - 4 حا^3 هـ]$

، $ق_3 = م حا 2هـ = م × 2 حا هـ حتا هـ$ ، $ق_2 = م حا هـ$

∴ الطرف الأيسر $= (ق_2) × (ق_2 - ق_1) = (م حا هـ) × [م حا هـ - (-م[3 حا هـ - 4 حا^3 هـ])]$

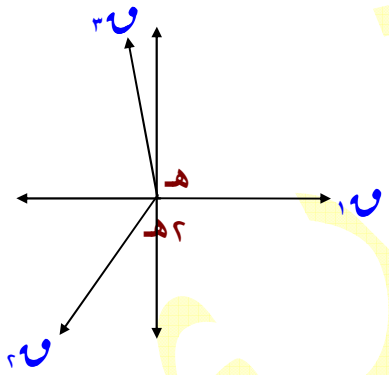
$= م^2 حا^2 هـ + م^2 حا هـ[3 حا هـ - 4 حا^3 هـ] = م^2 حا^2 هـ + م^2 حا^2 هـ[3 - 4 حا^2 هـ]$

$= م^2 حا^2 هـ[4 - 4 حا^2 هـ] = 4 م^2 حا^2 هـ[1 - حا^2 هـ] = 4 م^2 حا^2 هـ حتا^2 هـ = (ق_3)^2$

= الطرف الأيمن

حل ثالث

بتحليل القوى فى إتجاهين متعامدين كما بالشكل المقابل :



$س = ق_1 + ق_3 حتا هـ + ق_2 حتا(360 - 2هـ)$

$= ق_1 + ق_3 حتا هـ + ق_2 حتا 2هـ$ (١)

$ص = ق_3 حا هـ + ق_2 حا(360 - 2هـ)$

$= ق_3 حا هـ - ق_2 حا 2هـ$

$= ق_3 حا هـ - 2 ق_2 حا هـ حتا هـ$ (٢)

∵ القوى متزنة ∴ $س = 0$ ، $ص = 0$

∴ من (٢) $ق_3 = 2 ق_2 حتا هـ$ بالتعويض فى (١)

∴ $ق_1 + 2 ق_2 حتا^2 هـ + ق_2(2 حتا^2 هـ - 1) = 0$

∴ $ق_1 + 4 ق_2 حتا^2 هـ - ق_2 = 0$

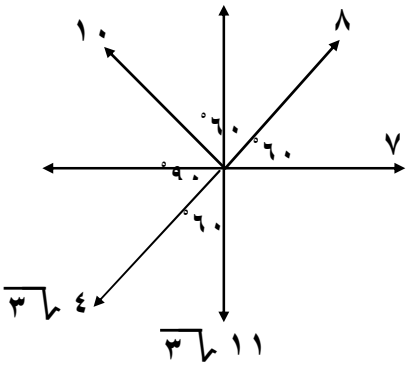
∴ $ق_1 = ق_2 - 4 ق_2 حتا^2 هـ$

∴ الطرف الأيسر $= ق_2^2 - ق_2 ق_1 = ق_2^2 - ق_2^2 + 4 ق_2 حتا^2 هـ = 4 ق_2 حتا^2 هـ = ق_3^2 =$ الأيمن

محصلة و إتزان عدة قوى مستوية و متلاقية فى نقطة

أثرت القوى ٧ ، ٨ ، ١٠ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ١١ $\sqrt{٣}$ ث كجم فى نقطة مادية و كان قياس الزاوية بين إتجاهى القوتين الأولى و الثانية ٦٠° ، بين الثانية و الثالثة ٦٠° ، بين الثالثة و الرابعة ٩٠° ، و بين الرابعة و الخامسة ٦٠° أوجد مقدار و إتجاه المحصلة

الحل



س = ٧ حتا ٠° + ٨ حتا ٦٠° + ١٠ حتا ١٢٠° + ٤ $\sqrt{٣}$ حتا ٢١٠°
+ ١١ $\sqrt{٣}$ حتا ٢٧٠°

س = ٧ × ١ + ٨ × $\frac{١}{٢}$ + ١٠ × − $\frac{١}{٢}$ + ٤ $\sqrt{٣}$ × − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
+ ١١ $\sqrt{٣}$ × ٠
= ٧ + ٤ − ٥ − ٦ + ٠ = ٠

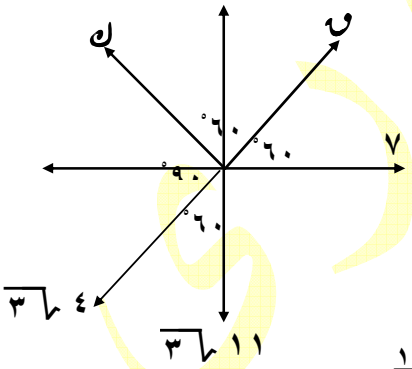
ص = ٧ حا ٠° + ٨ حا ٦٠° + ١٠ حا ١٢٠° + ٤ $\sqrt{٣}$ حا ٢١٠°
+ ١١ $\sqrt{٣}$ حا ٢٧٠°

ص = ٧ × ٠ + ٨ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ١٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٤ $\sqrt{٣}$ × − $\frac{١}{٢}$ + ١١ $\sqrt{٣}$ × − ١
= ٠ + ٤ $\sqrt{٣}$ + ٥ $\sqrt{٣}$ − ٢ $\sqrt{٣}$ − ١١ $\sqrt{٣}$ = − ٤ $\sqrt{٣}$

∴ المحصلة = ٤ $\sqrt{٣}$ ث كجم و تعمل فى إتجاه الجنوب

أثرت القوى ٧ ، ق ، ك ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ١١ $\sqrt{٣}$ ث كجم فى نقطة مادية و كان قياس الزاوية بين إتجاهى القوتين الأولى و الثانية ٦٠° ، بين الثانية و الثالثة ٦٠° ، بين الثالثة و الرابعة ٩٠° ، و بين الرابعة و الخامسة ٦٠° فإذا كانت هذه محصلة القوى تساوى ٤ $\sqrt{٣}$ و تؤثر فى إتجاه الجنوب أوجد قيمة كل من : ق ، ك

الحل



∵ المحصلة تؤثر فى إتجاه الجنوب

∴ س = صفر ، ص = − ٤ $\sqrt{٣}$

∴ س = ٧ × ١ + ق × $\frac{١}{٢}$ + ك × − $\frac{١}{٢}$ + ٤ $\sqrt{٣}$ × − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
+ ١١ $\sqrt{٣}$ × ٠ = صفر

∴ ق − ك = − ٢ (١)

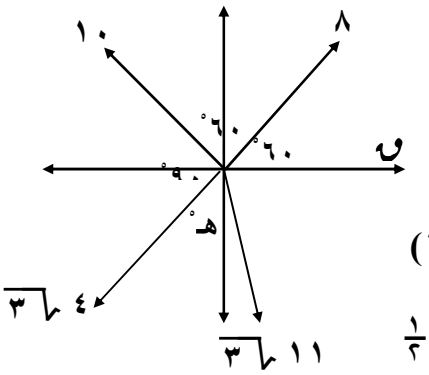
، ص = ٧ × ٠ + ق × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ك × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٤ $\sqrt{٣}$ × − $\frac{١}{٢}$
+ ١١ $\sqrt{٣}$ × − ١ = − ٤ $\sqrt{٣}$

∴ ق + ك = ١٨ (٢)

بحل (١) ، (٢) ينتج : ق = ٨ ث كجم ، ك = ١٠ ث كجم

أثرت القوى ق ، ٨ ، ١٠ ، ٤ √٣ ، ١١ √٣ ث كجم فى نقطة مادية و كان قياس الزاوية بين إتجاهى القوتين الأولى و الثانية ٦٠° ، بين الثانية و الثالثة ٦٠° ، بين الثالثة و الرابعة ٩٠° ، و بين الرابعة و الخامسة هـ° فإذا كانت هذه محصلة القوى تساوى ٤ √٣ و تؤثر فى إتجاه الجنوب أوجد قيمة كل من : ق ، هـ حيث : هـ حادة موجبة

الحل



∵ المحصلة تؤثر فى إتجاه الجنوب

∴ س = صفر ، ص = − ٤ √٣

∴ ق × ١ + ٨ × ½ + ١٠ × − ½ + ٤ √٣ × − √٣/٢
+ ١١ √٣ × حتا (٢١٠° + هـ) = صفر

∴ ق + ١١ √٣ × حتا (٢١٠° + هـ) = ٧ (١)

، ص = ق × ٠ + ٨ × √٣/٢ + ١٠ × √٣/٢ + ٤ √٣ × − ½
+ ١١ √٣ × حا (٢١٠° + هـ) = − ٤ √٣

∴ ١١ × حا (٢١٠° + هـ) = − ١١

∴ حا (٢١٠° + هـ) = − ١ ∴ ٢١٠° + هـ = ٢٧٠° ∴ هـ = ٦٠°

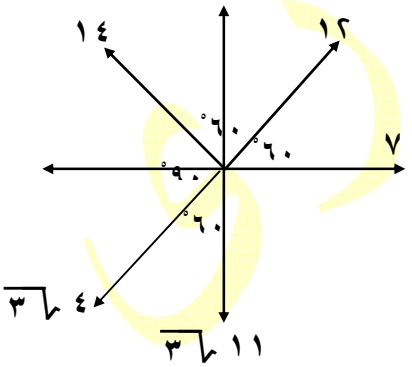
من (١) ينتج : ق + ١١ √٣ × حتا ٢٧٠° = ٧

ق + ١١ √٣ × ٠ = ٧

∴ ق = ٧ ث كجم

أثرت القوى ٧ ، ١٢ ، ١٤ ، ٤ √٣ ، ١١ √٣ ث كجم فى نقطة مادية و كان قياس الزاوية بين إتجاهى القوتين الأولى و الثانية ٦٠° ، بين الثانية و الثالثة ٦٠° ، بين الثالثة و الرابعة ٩٠° ، و بين الرابعة و الخامسة ٦٠° اثبت أن هذه القوى متزنة

الحل



س = ٧ حتا ٠° + ١٢ حتا ٦٠° + ١٤ حتا ١٢٠° + ٤ √٣ حتا ٢١٠°
+ ١١ √٣ حتا ٢٧٠°

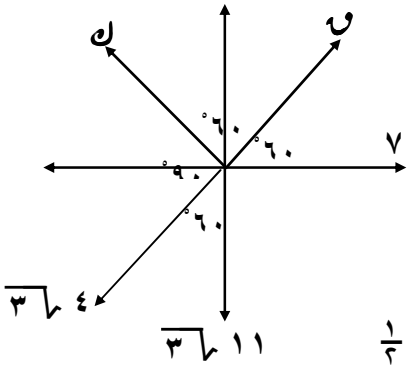
س = ٧ × ١ + ١٢ × ½ + ١٤ × − ½ + ٤ √٣ × − √٣/٢
+ ١١ √٣ × ٠ = صفر

ص = ٧ حا ٠° + ١٢ حا ٦٠° + ١٤ حا ١٢٠° + ٤ √٣ حا ٢١٠°
+ ١١ √٣ حا ٢٧٠°

ص = ٧ × ٠ + ١٢ × √٣/٢ + ١٤ × √٣/٢ + ٤ √٣ × − ½
+ ١١ √٣ × − ١ = صفر

∴ ح = صفر ∴ القوى متزنة

أثرت القوى ٧ ، ق ، ك ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ١١ $\sqrt{٣}$ ث كجم فى نقطة مادية و كان قياس الزاوية بين إتجاهى القوتين الأولى و الثانية ٦٠° ، بين الثانية و الثالثة ٦٠° ، بين الثالثة و الرابعة ٩٠° ، و بين الرابعة و الخامسة ٦٠° فإذا كانت هذه القوى متزنة أوجد قيمة كل من : ق ، ك



الحل

∵ القوى متزنة ∴ ح = صفر

∴ س = صفر ، ص = صفر

∴ س = ٧ × ١ + ق × $\frac{١}{٢}$ + ك × − $\frac{١}{٢}$ + ٤ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ١١ $\sqrt{٣}$ × ٠ = صفر

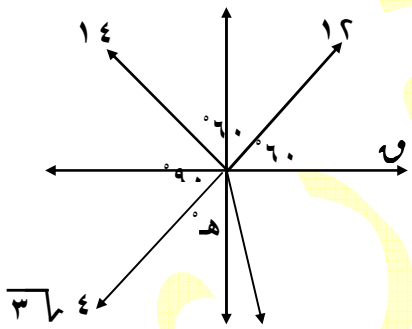
∴ ق − ك = − ٢ (١)

، ص = ٧ × ٠ + ق × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ك × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٤ $\sqrt{٣}$ × − $\frac{١}{٢}$ + ١١ $\sqrt{٣}$ × − ١ = صفر

∴ ق + ك = ٢٦ (٢)

بحل (١) ، (٢) ينتج : ق = ١٢ ث كجم ، ك = ١٤ ث كجم

أثرت القوى ق ، ١٢ ، ١٤ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ١١ $\sqrt{٣}$ ث كجم فى نقطة مادية و كان قياس الزاوية بين إتجاهى القوتين الأولى و الثانية ٦٠° ، بين الثانية و الثالثة ٦٠° ، بين الثالثة و الرابعة ٩٠° ، و بين الرابعة و الخامسة هـ فإذا كانت هذه القوى متزنة أوجد قيمة كل من : ق ، هـ حيث : هـ حادة موجبة



الحل

∵ القوى متزنة ∴ ح = صفر

∴ س = صفر ، ص = صفر

∴ ق × ١ + ١٢ × $\frac{١}{٢}$ + ١٤ × − $\frac{١}{٢}$ + ٤ $\sqrt{٣}$ × − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ١١ $\sqrt{٣}$ × حتا (٢١٠° + هـ) = صفر

∴ ق + ١١ $\sqrt{٣}$ × حتا (٢١٠° + هـ) = ٧ (١)

، ص = ق × ٠ + ١٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ١٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٤ $\sqrt{٣}$ × − $\frac{١}{٢}$ + ١١ $\sqrt{٣}$ × حا (٢١٠° + هـ) = صفر

∴ ١١ $\sqrt{٣}$ + ١١ $\sqrt{٣}$ × حا (٢١٠° + هـ) = صفر

∴ حا (٢١٠° + هـ) = − ١ ∴ ٢١٠° + هـ = ٢٧٠° ∴ هـ = ٦٠°

من (١) ينتج : ق + ١١ $\sqrt{٣}$ × حتا ٢٧٠° = ٧

ق + ١١ $\sqrt{٣}$ × ٠ = ٧

∴ ق = ٧ ث كجم

عزم قوة بالنسبة لنقطة

القوة $\overleftarrow{ق}$ = $\overleftarrow{س}$ ـ ٤ $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة حـ = (١ ، ـ ٣) أوجد متجه عزم هذه القوة بالنسبة للنقطة ب = (ـ ٥ ، ٠) ، و كذا بالنسبة للنقطة ء (٢ ، ـ ٧)

الحل

$\overleftarrow{بحـ}$ = ٦ $\overleftarrow{س}$ ـ ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ءحـ}$ = ـ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{ج_ب}$ = (٦ $\overleftarrow{س}$ ـ ٣ $\overleftarrow{ص}$) × ($\overleftarrow{س}$ ـ ٤ $\overleftarrow{ص}$) = (ـ ٢٤ + ٣) $\overleftarrow{ع}$ = ـ ٢١ $\overleftarrow{ع}$

$\overleftarrow{ج_ء}$ = (ـ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$) × ($\overleftarrow{س}$ ـ ٤ $\overleftarrow{ص}$) = (٤ ـ ٤) $\overleftarrow{ع}$ = $\overleftarrow{٠}$

القوة $\overleftarrow{ق}$ = ل $\overleftarrow{س}$ + م $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة حـ = (١ ، ـ ٣) ، القياس الجبرى لمتجه عزمها بالنسبة للنقطة ب = (ـ ٥ ، ٠) يساوى ـ ٢١ وحدة عزم ، و ينعدم القياس الجبرى لمتجه عزمها بالنسبة للنقطة ء (٢ ، ـ ٧) أوجد مقدار $\|\overleftarrow{ق}\|$ و معادلة خط عملها

الحل

$\overleftarrow{بحـ}$ = ٦ $\overleftarrow{س}$ ـ ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ءحـ}$ = ـ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{ج_ب}$ = (٦ $\overleftarrow{س}$ ـ ٣ $\overleftarrow{ص}$) × (ل $\overleftarrow{س}$ + م $\overleftarrow{ص}$) = ـ ٢١ $\overleftarrow{ع}$

$\overleftarrow{ج_ء}$ = (ـ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$) × (ل $\overleftarrow{س}$ + م $\overleftarrow{ص}$) = $\overleftarrow{٠}$

∴ ٦ م + ٣ ل = ـ ٢١ ، ـ م ـ ٤ ل = ٠

بحل المعادلتين معاً ينتج : ل = ١ ، م = ٤

∴ $\overleftarrow{ق}$ = $\overleftarrow{س}$ ـ ٤ $\overleftarrow{ص}$

∴ $\|\overleftarrow{ق}\|$ = $\sqrt{١ + ١٦}$ = $\sqrt{١٧}$ ، ميل $\overleftarrow{ق}$ = $\frac{-٤}{١}$

∴ معادلة خط عملها هى : ص + ٣ = ـ ٤ (س ـ ١)

أى : ٤ س + ص ـ ١ = ٠

القوة $\overleftarrow{ق}$ = $\overleftarrow{س}$ ـ ٤ $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة حـ = (١ ، ـ ٣) ، القياس الجبرى لمتجه عزمها بالنسبة للنقطة ب = (س ، ٠) يساوى ـ ٢١ وحدة عزم ، و ينعدم القياس الجبرى لمتجه عزمها بالنسبة للنقطة ء (٢ ، ص) أوجد قيمة كل من : س ، ص

الحل

$\overleftarrow{بحـ}$ = (١ ـ س) $\overleftarrow{س}$ ـ ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ءحـ}$ = ـ $\overleftarrow{س}$ + (ـ ٣ ـ ص) $\overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{ج_ب}$ = [(١ ـ س) $\overleftarrow{س}$ ـ ٣ $\overleftarrow{ص}$] × [$\overleftarrow{س}$ ـ ٤ $\overleftarrow{ص}$] = ـ ٢١ $\overleftarrow{ع}$

$\overleftarrow{ج_ء}$ = [ـ $\overleftarrow{س}$ (ـ ٣ ـ ص) $\overleftarrow{ص}$] × ($\overleftarrow{س}$ ـ ٤ $\overleftarrow{ص}$) = $\overleftarrow{٠}$

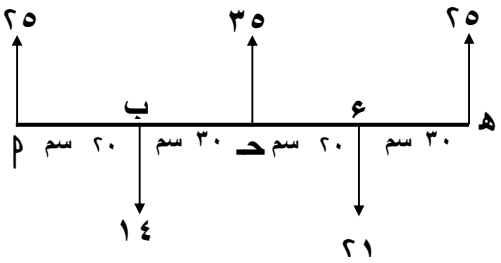
∴ ـ ٤ (١ ـ س) + ٣ = ـ ٢١ ، و منها : س = ـ ٥

، ٤ ـ (ـ ٣ ـ ص) = ٠ ، و منها : ص = ـ ٧

عزوم القوى المستوية

أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ نقط على مستقيم واحد حيث أ ب = حـ ء = ٢٠ سم ، ب حـ = ء هـ = ٣٠ سم أثرت القوى التى مقاديرها ١٤ ، ٢١ نيوتن فى النقطتين ب ، ء رأسياً لأسفل على الترتيب كما أثرت القوى ٢٥ ، ٣٥ ، ٢٥ نيوتن فى النقط أ ، حـ ، هـ رأسياً لأعلى على الترتيب أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول حـ ، ب

الحل



المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول حـ =

= – ٢٥ × أ حـ + ١٤ × ب حـ – ٢١ × ء حـ + ٢٥ × حـ هـ

= – ٢٥ × ٥٠ + ١٤ × ٣٠ + ٠ – ٢١ × ٢٠ + ٢٥ × ٥٠ = ٠

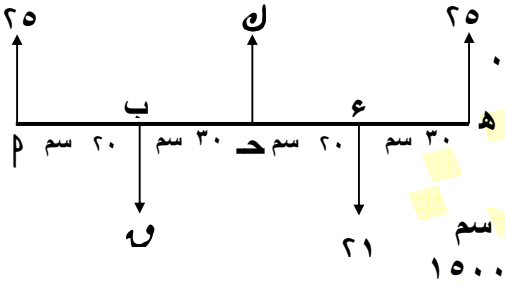
المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول ب =

= – ٢٥ × أ ب + ٣٥ × ب حـ – ٢١ × ب ء + ٢٥ × ب هـ

= – ٢٥ × ٢٠ + ٠ + ٣٥ × ٣٠ – ٢١ × ٥٠ + ٢٥ × ٨٠ = ١٥٠٠ نيوتن . سم

أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ نقط على مستقيم واحد حيث أ ب = حـ ء = ٢٠ سم ، ب حـ = ء هـ = ٣٠ سم أثرت القوى التى مقاديرها ق ، ٢١ نيوتن فى النقطتين ب ، ء رأسياً لأسفل على الترتيب كما أثرت القوى ٢٥ ، ك ، ٢٥ نيوتن فى النقط أ ، حـ ، هـ رأسياً لأعلى على الترتيب فإذا كان المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول حـ يساوى صفر ، المجموع الجبرى لعزومها حول ب يساوى ١٥٠٠ نيوتن . سم أوجد ق ، ك

الحل



∵ المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول حـ = ٠

∴ – ٢٥ × أ حـ + ق × ب حـ – ٢١ × ء حـ + ٢٥ × حـ هـ = ٠

∴ – ٢٥ × ٥٠ + ق × ٣٠ – ٢١ × ٢٠ + ٢٥ × ٥٠ = ٠

و منها : ق = ١٤ نيوتن

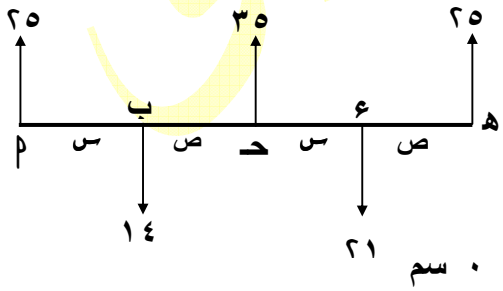
، ∵ المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول ب = ١٥٠٠ نيوتن . سم

∴ – ٢٥ × أ ب + ك × ب حـ – ٢١ × ب ء + ٢٥ × ب هـ = ١٥٠٠

∴ – ٢٥ × ٢٠ + ك × ٣٠ – ٢١ × ٥٠ + ٢٥ × ٨٠ = ١٥٠٠ و منها : ك = ٣٥ نيوتن

أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ نقط على مستقيم واحد حيث أ ب = حـ ء = س سم ، ب حـ = ء هـ = ص سم أثرت القوى التى مقاديرها ١٤ ، ٢١ نيوتن فى النقطتين ب ، ء رأسياً لأسفل على الترتيب كما أثرت القوى ٢٥ ، ٣٥ ، ٢٥ نيوتن فى النقط أ ، حـ ، هـ رأسياً لأعلى على الترتيب فإذا كان المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول حـ يساوى صفر ، المجموع الجبرى لعزومها حول ب يساوى ١٥٠٠ نيوتن . سم أوجد س ، ص

الحل



∵ المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول حـ = ٠

∴ – ٢٥ × (س + ص) + ١٤ × ص –

٢١ × س + ٢٥ × (س + ص) = ٠

∴ ١٤ ص = ٢١ س (١)

، ∵ المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول ب = ١٥٠٠ نيوتن . سم

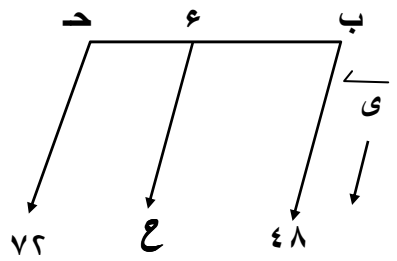
∴ – ٢٥ × س + ٣٥ × ص – ٢١ × (س + ص) + ٢٥ × (س + ٢ ص) = ١٥٠٠

∴ ٦٤ ص – ٢١ س = ١٥٠٠ بالتعويض من (١) ينتج : ص = ٣٠ سم ، س = ٢٠ سم

محصلة قوتين متوازيتين

قوتان متوازيتان مقدارهما ٤٨ ، ٧٢ نيوتن تؤثران فى النقطتين ب ، حـ على الترتيب من جسم متماسك حيث ب حـ = ١٥٠ سم عين محصلتهما تعييناً تاماً إذا كانتا فى إتجاه واحد

الحل



$\overleftarrow{ح} = ٤٨\,\overleftarrow{ى} + ٧٢\,\overleftarrow{ى} = ١٢٠\,\overleftarrow{ى}$

∴ ح = ١٢٠ نيوتن

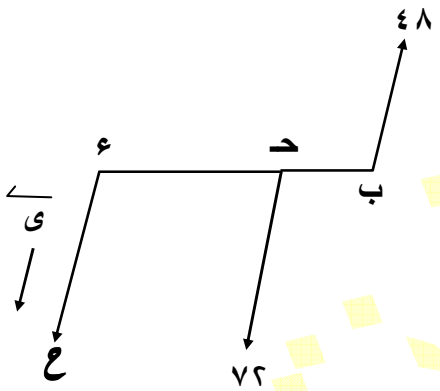
بفرض أن ء ∈ $\overline{ب حـ}$ و تقع على خط عمل $\overleftarrow{ح}$

∴ ٤٨ × ب ء = ٧٢ (١٥٠ – ب ء)

∴ ٢ ب ء = ٤٥٠ – ٣ ب ء ∴ ب ء = ٩٠ سم

قوتان متوازيتان مقدارهما ٤٨ ، ٧٢ نيوتن تؤثران فى النقطتين ب ، حـ على الترتيب من جسم متماسك حيث ب حـ = ١٥٠ سم عين محصلتهما تعييناً تاماً إذا كانتا فى إتجاهين متضادين

الحل



$\overleftarrow{ح} = ٧٢\,\overleftarrow{ى} - ٤٨\,\overleftarrow{ى} = ٢٤\,\overleftarrow{ى}$

∴ ح = ٢٤ نيوتن

بفرض أن ء ∈ $\overleftarrow{ب حـ}$ و تقع على خط عمل $\overleftarrow{ح}$

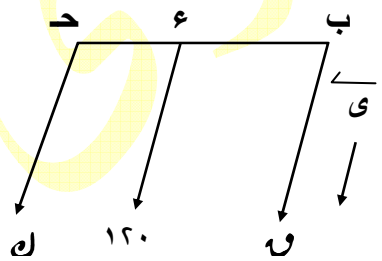
∴ ٧٢ × حـ ء = ٤٨ (١٥٠ + حـ ء)

∴ ٣ حـ ء = ٣٠٠ + ٢ حـ ء

حـ ء = ٣٠٠ سم

قوتان متوازيتان متحدا الإتجاه و تؤثران فى النقطتين ب ، حـ على الترتيب من جسم متماسك حيث ب حـ = ١٥٠ سم فإذا كان مقدار محصلتهما ١٢٠ نيوتن و خط عملها يبعد عن خط عمل القوة الأولى مسافة ٩٠ سم أوجد مقدار هاتين القوتين

الحل



نفرض أن القوتين مقدارهما ق ، ك

$ق\,\overleftarrow{ى} + ك\,\overleftarrow{ى} = ١٢٠\,\overleftarrow{ى}$

∴ ق + ك = ١٢٠ (١)

بفرض أن ء ∈ $\overline{ب حـ}$ و تقع على خط عمل $\overleftarrow{ح}$

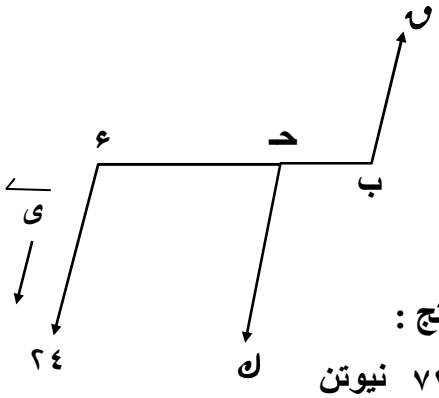
∴ ق × ٩٠ = ك × ٦٠

∴ ك = $\frac{٣}{٢}$ ق بالتعويض فى (١) ينتج :

ق = ٤٨ نيوتن ، ك = ٧٢ نيوتن

قوتان مقدارهما ق ، ك متوازيتان و متضادتان فى الإتجاه و تؤثران فى النقطتين ب ، حـ على الترتيب من جسم متماسك حيث ب حـ = ١٥٠ سم حيث ق < ك فإذا كان مقدار محصلتهما ٢٤ نيوتن و خط عملها يبعد عن خط عمل القوة الأولى مسافة ٤٥٠ سم أوجد مقدار هاتين القوتين

الحل



ك $\overleftarrow{ى}$ − ق $\overleftarrow{ى}$ = ٢٤ $\overleftarrow{ى}$

∴ ك − ق = ٢٤ (١)

بفرض أن ء ∈ $\overleftarrow{ب حـ}$ و تقع على خط عمل $\overleftarrow{ح}$

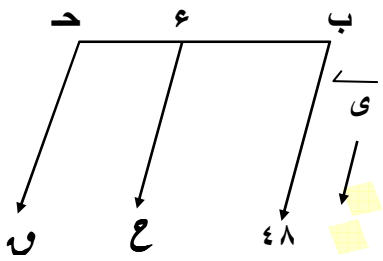
∴ ق × ٤٥٠ = ك × ٣٠٠

∴ ك = $\frac{٣}{٢}$ ق بالتعويض فى (١) ينتج :

ق = ٤٨ نيوتن ، ك = ٧٢ نيوتن

قوتان متوازيتان و تؤثران فى النقطتين ب ، حـ على الترتيب من جسم متماسك و مقدار محصلتهما ١٢٠ نيوتن و مقدار إحدى القوتين ٤٨ نيوتن و خط عملها يبعد عن خط عمل المحصلة مسافة ٩٠ سم أوجد مقدار و إتجاه القوة الثانية و البعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة و المحصلة فى إتجاه واحد

الحل



بفرض أن مقدار القوة الثانية = ق نيوتن

∵ ٤٨ ، ح فى إتجاه واحد ، ح > ٤٨

∴ القوتان متحدا الإتجاه ∴ ح = ٤٨ + ق

∴ ١٢٠ = ٤٨ + ق ∴ ق = ٧٢ نيوتن

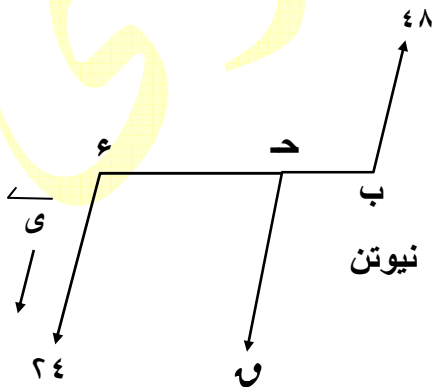
، ٤٨ × ٩٠ = ٧٢ × ء حـ

∴ ء حـ = ٦٠ سم

∴ البعد بين القوتين = ٩٠ + ٦٠ = ١٥٠ سم

قوتان متوازيتان و تؤثران فى النقطتين ب ، حـ على الترتيب من جسم متماسك ومقدار محصلتهما ٢٤ نيوتن و مقدار إحدى القوتين ٤٨ نيوتن و خط عملها يبعد عن خط عمل المحصلة مسافة ٤٥٠ سم أوجد مقدار و إتجاه القوة الثانية و البعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة و المحصلة فى إتجاهين متضادين

الحل



بفرض أن مقدار القوة الثانية = ق نيوتن

∵ ٤٨ ، ح فى إتجاهين متضادين

∴ القوتان تعملان فى إتجاهين متضادين

، ق هى الأكبر معياراً

∴ ح = ق − ٤٨

∴ ٢٤ = ق − ٤٨ ∴ ق = ٧٢ نيوتن

، ٤٨ × ٤٥٠ = ٧٢ × ء حـ

∴ ء حـ = ٣٠٠ سم

∴ البعد بين القوتين ٤٥٠ − ٣٠٠ = ١٥٠ سم

الإزدواج

إحدى قوتى إزدواج هى $\overleftarrow{ق} = ٦\ \overleftarrow{س} - ٨\ \overleftarrow{ص}$ و خط عملها يمر بنقطة الأصل و ، و خط عمل القوة الأخرى يمر بالنقطة حـ (٢ ، ـ ٥) أوجد متجه عزم الإزدواج ثم أحسب طول ذراع الإزدواج

الحل

$\overleftarrow{حـو} = -٢\overleftarrow{س} + ٥\overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{ج} = (-٢\overleftarrow{س} + ٥\overleftarrow{ص}) \times (٦\overleftarrow{س} - ٨\overleftarrow{ص})$

$= (١٦ - ٣٠)\ \overleftarrow{ع} = -١٤\ \overleftarrow{ع}$

$ل = \frac{\|\overleftarrow{ج}\|}{\|\overleftarrow{ق}\|} = \frac{١٤}{\sqrt{٦٤ + ٣٦}} = ١,٤$ وحدة طول

إحدى قوتى إزدواج هى $\overleftarrow{ق} = ل\ \overleftarrow{س} - ٨\ \overleftarrow{ص}$ و خط عملها يمر بنقطة الأصل و ، و خط عمل القوة الأخرى يمر بالنقطة حـ (٢ ، ـ ٥) فإذا كان متجه عزم الإزدواج يساوى $-١٤\ \overleftarrow{ع}$

أوجد قيمة ل

الحل

$\overleftarrow{حـو} = -٢\overleftarrow{س} + ٥\overleftarrow{ص}$ $\qquad$ $\overleftarrow{ج} = -١٤\ \overleftarrow{ع}$

$\therefore (-٢\overleftarrow{س} + ٥\overleftarrow{ص}) \times (ل\overleftarrow{س} - ٨\overleftarrow{ص}) = -١٤\ \overleftarrow{ع}$

$\therefore (١٦ - ٥ل)\ \overleftarrow{ع} = -١٤\ \overleftarrow{ع}$

$\therefore ١٦ - ٥ل = -١٤$

و منها : $ل = ٦$

إحدى قوتى إزدواج هى $\overleftarrow{ق} = ٦\ \overleftarrow{س} - ٨\ \overleftarrow{ص}$ و خط عملها يمر بنقطة الأصل و ، و خط عمل القوة الأخرى يمر بالنقطة حـ (س ، ـ ٥) فإذا كان متجه عزم الإزدواج يساوى $-١٤\ \overleftarrow{ع}$

أوجد قيمة س

الحل

$\overleftarrow{حـو} = -س\overleftarrow{س} + ٥\overleftarrow{ص}$ $\qquad$ $\overleftarrow{ج} = -١٤\ \overleftarrow{ع}$

$\therefore (-س\overleftarrow{س} + ٥\overleftarrow{ص}) \times (٦\overleftarrow{س} - ٨\overleftarrow{ص}) = -١٤\ \overleftarrow{ع}$

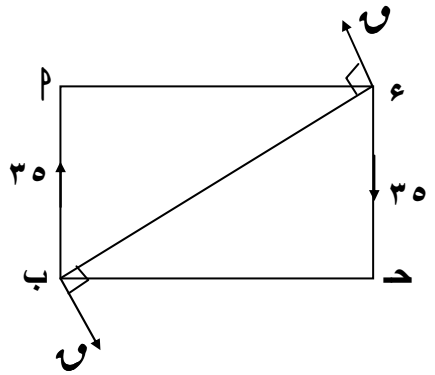
$\therefore (٨س - ٣٠)\ \overleftarrow{ع} = -١٤\ \overleftarrow{ع}$

$\therefore ٨س - ٣٠ = -١٤$

و منها : $س = ٢$

أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم أثرت قوتان مقدار كل منهما ٣٥ ث كجم فى $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء حـ}}$ أوجد مقدار كل من القوتين المؤثرتين فى ب ، ء و عمودتين على $\overline{\text{ب ء}}$ بحيث تحدثان إتزاناً مع القوتين المعلومتين

الحل



ب ء = ١٠ سم

القوتان (٣٥ ، ٣٥) تكونان إزدواجاً القياس الجبرى لعزمه

$ج_١$ = – ٣٥ × ٨ = – ٢٨٠ ث كجم ٠ سم

، القوتان (ق ، ق) تكونان إزدواجاً القياس الجبرى لعزمه

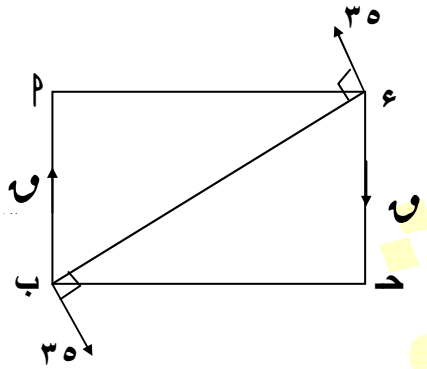
$ج_٢$ = ق × ١٠

∵ الإزدواجان متزنان ∴ $ج_١$ + $ج_٢$ = صفر

∴ – ٢٨٠ + ق × ١٠ = ٠ ∴ ق = ٢٨ ث كجم

أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم أثرت قوتان مقدار كل منهما ق ث كجم فى $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء حـ}}$ كما أثرت قوتان مقدار كل منهما ٢٨ ث كجم فى ب ، ء و عمودتين على $\overline{\text{ب ء}}$ بحيث تحدثان إتزاناً مع القوتين المعلومتين أوجد قيمة ق

الحل



ب ء = ١٠ سم

القوتان (ق ، ق) تكونان إزدواجاً القياس الجبرى لعزمه

$ج_١$ = – ق × ٨

، القوتان (٢٨ ، ٢٨) تكونان إزدواجاً القياس الجبرى لعزمه

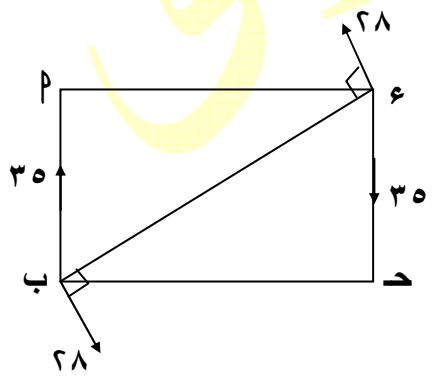
$ج_٢$ = ٢٨ × ١٠ = ٢٨٠ ث كجم ٠ سم

∵ الإزدواجان متزنان ∴ $ج_١$ + $ج_٢$ = صفر

∴ – ق × ٨ + ٢٨٠ = ٠ ∴ ق = ٣٥ ث كجم

أ ب حـ ء مستطيل أثرت قوتان مقدار كل منهما ٣٥ ث كجم فى $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء حـ}}$ كما أثرت قوتان مقدار كل منهما ٢٨ ث كجم فى ب ، ء و عمودتين على $\overline{\text{ب ء}}$ بحيث تحدثان إتزاناً مع القوتين المعلومتين فإذا كان ب ء = ١٠ سم أوجد طول $\overline{\text{أ ء}}$

الحل



القوتان (٣٥ ، ٣٥) تكونان إزدواجاً القياس الجبرى لعزمه

$ج_١$ = – ٣٥ × أ ء

، القوتان (٢٨ ، ٢٨) تكونان إزدواجاً القياس الجبرى لعزمه

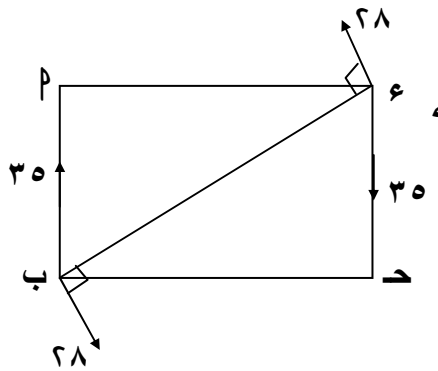
$ج_٢$ = ٢٨ × ١٠ = ٢٨٠ ث كجم ٠ سم

∵ الإزدواجان متزنان ∴ $ج_١$ + $ج_٢$ = صفر

∴ – ٣٥ × أ ء + ٢٨٠ = ٠ ∴ أ ء = ٨ سم

أ ب حـ ء مستطيل أثرت قوتان مقدار كل منهما ٣٥ ث كجم فى $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء حـ}}$ كما أثرت قوتان مقدار كل منهما ٢٨ ث كجم فى ب ، ء و عمودتين على $\overline{\text{ب ء}}$ بحيث تحدثان إتزاناً مع القوتين المعلومتين فإذا كان حـ ء = ٨ سم أوجد طول $\overline{\text{ب ء}}$

الحل



القوتان (٣٥ ، ٣٥) تكونان إزدواجاً القياس الجبرى لعزمه

$ج_١$ = ـ ٣٥ × ٨ = ـ ٢٨٠ ث كجم ٠ سم

، القوتان (٢٨ ، ٢٨) تكونان إزدواجاً القياس الجبرى لعزمه

$ج_٢$ = ٢٨× ب ء

∵ الإزدواجان متزنان

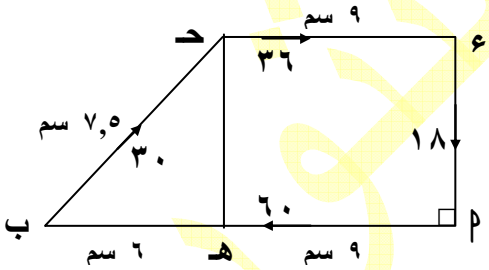
∴ $ج_١ + ج_٢$ = صفر

∴ ـ ٢٨٠ + ٢٨× ب ء = ٠

∴ ب ء = ١٠ سم

أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية فى أ ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$ ، أ ب = ١٥ سم ، ب حـ = ٧,٥ سم ، حـ ء = ٩ سم أثرت القوى ٦٠ ، ٣٠ ، ٣٦ ، ١٨ نيوتن فى الإتجاهات $\overleftarrow{\text{أ ب}}$؛ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء أ}}$ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواج و أوجد معيار عزمه

الحل



من الشكل المقابل :

ب هـ = ١٥ ـ ٩ = ٦ سم

∴ حـ هـ = أ ء = ٤,٥ سم

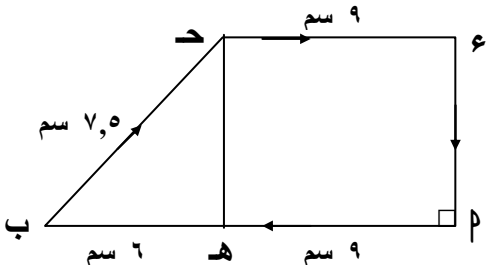
∵ $\frac{٦٠}{١٥} = \frac{٣٠}{٧,٥} = \frac{٣٦}{٩} = \frac{١٨}{٤,٥}$ = ٤

∴ القوى ممثلة تمثيلاً تاماً بأضلاع الشكل أ ب حـ ء ، و فى إتجاه دورى واحد

∴ المجموعة تكافئ إزدواجاً معيار عزمه = ٢ × [$\frac{١}{٢}$ × (١٥ + ٩) × ٤,٥] × ٤

= ٤٣٢ نيوتن ٠ سم

أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية فى أ ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$ ، أ ب = ١٥ سم ، ب حـ = ٧,٥ سم ، حـ ء = ٩ سم أثرت قوى مقاديرها ق_1 ، ق_2 ، ق_3 ، ق_4 نيوتن فى الإتجاهات $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{ء أ}}$ على الترتيب بحيث كانت هذه القوى ممثلة تمثيلاً تاماً بالقطع الموجهة فإذا كانت المجموعة تكافئ إزدواجاً معيار عزمه ٤٣٢ نيوتن ٠ سم فى الإتجاه أ ب حـ ء أوجد مقدار كل من ق_1 ، ق_2 ، ق_3 ، ق_4



الحل

من الشكل المقابل :

ب هـ = ١٥ ـ ٩ = ٦ سم

∴ حـ هـ = أ ء = ٤,٥ سم

∵ القوى ممثلة تمثيلاً تاماً بأضلاع الشكل أ ب حـ ء ، و فى إتجاه دورى واحد

، المجموعة تكافئ إزدواجاً معيار عزمه = ٤٣٢ نيوتن ٠ سم

∴ ٢ × [½ × (١٥ + ٩) × ٤,٥] × م = ٤٣٢

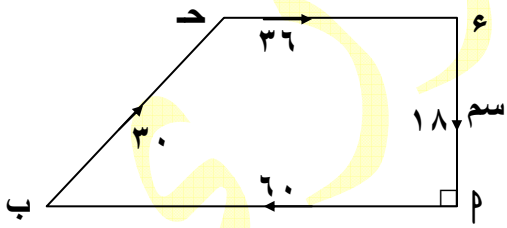
∴ م = ٤ أى أن : أضلاع الشكل تمثل القوى بمقياس رسم ١ : ٤

∴ $\frac{\text{ق}_1}{١٥} = \frac{\text{ق}_2}{٧,٥} = \frac{\text{ق}_3}{٩} = \frac{\text{ق}_4}{٤,٥} = ٤$

و منها : ق_1 = ٦٠ نيوتن ، ق_2 = ٣٠ نيوتن ، ق_3 = ٣٦ نيوتن ، ق_4 = ١٨ نيوتن

أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية فى أ ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$ ، أثرت القوى ٦٠ ، ٣٠ ، ٣٦ ، ١٨ نيوتن فى الإتجاهات $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{ء أ}}$ على الترتيب بحيث كانت هذه القوى ممثلة تمثيلاً تاماً بالقطع الموجهة فإذا كانت المجموعة تكافئ إزدواجاً معيار عزمه ٤٣٢ نيوتن ٠ سم فى الإتجاه أ ب حـ ء ، كانت مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء تساوى ٥٤ سم^2 أوجد محيط شبه المنحرف أ ب حـ ء

الحل



∵ القوى ممثلة تمثيلاً تاماً بأضلاع الشكل أ ب حـ ء ، و فى إتجاه دورى واحد

، المجموعة تكافئ إزدواجاً معيار عزمه = ٤٣٢ نيوتن ٠ سم

∴ ٢ × [½ × (أ ب + ء حـ) × أ ء] × م = ٤٣٢

، $\frac{٦٠}{\text{أ ب}} = \frac{٣٠}{\text{ب حـ}} = \frac{٣٦}{\text{حـ ء}} = \frac{١٨}{\text{ء أ}}$ = م

∴ (أ ب + ء حـ) × أ ء × $\frac{١٨}{\text{ء أ}}$ = ٤٣٢

∴ م = ٤ أى أن : أضلاع الشكل تمثل القوى بمقياس رسم ١ : ٤

∴ $\frac{٦٠}{\text{أ ب}} = \frac{٣٠}{\text{ب حـ}} = \frac{٣٦}{\text{حـ ء}} = \frac{١٨}{\text{ء أ}}$ = ٤

∴ أ ب = ١٥ سم ، ب حـ = ٧,٥ سم ، حـ ء = ٩ سم ، ء أ = ٤,٥ سم

∴ محيط شبه المنحرف أ ب حـ ء = ٣٦ سم